

Calcolo delle Probabilità 1
M. Isopi - M. Piccioni
Compito del 19-2-2008

Esercizio 1.

Un autobus effettua un tragitto con n fermate. Due passeggeri, Fausto e Lamberto, salgono al capolinea e decidono indipendentemente la fermata alla quale scendono, con la stessa regola: la probabilità di scendere alla i -esima fermata è proporzionale ad i , per $i = 1, \dots, n$. Sia X il numero della fermata alla quale scende Fausto e Y il numero della fermata alla quale scende Lamberto. Si tenga presente che

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- a) Calcolare la distribuzione congiunta di X e di Y .
- b) Calcolare la probabilità dell'evento $A = \{\text{Fausto e Lamberto scendono alla stessa fermata}\}$.
- c) Calcolare la distribuzione di X condizionatamente ad A .

Esercizio 2.

Un ristorante serve per cena pasta, pizza o riso. Un gruppo di nove persone si reca una sera in questo ristorante. Supponendo che ciascuno di essi scelga a caso un piatto da ordinare, calcolare la probabilità che:

- a) vengano ordinate esattamente tre pizze;
- b) vengano ordinate lo stesso numero di paste, pizze e risi;
- c) vengano ordinate paste e pizze in egual numero, e questo non sia inferiore al numero dei risi ordinati.

Esercizio 3.

Un apparecchio funziona con due transistor, e si blocca quando entrambi sono guasti. Alla fine di ogni giornata viene verificato il funzionamento dell'apparecchio, e, solo se risulta bloccato, entrambi i transistor vengono sostituiti. Supponiamo che la probabilità di guasto di un transistor nella giornata sia $p = 0.2$, indipendentemente dal tempo e dalle condizioni in cui è rimasto in funzione.

Si indichi con X_n il numero di transistor funzionanti alla fine dell' n -esimo giorno **prima** dell'eventuale sostituzione dei transistor guasti.

- a) Dimostrare che X_n costituisce una catena di Markov omogenea, scriverne la matrice di transizione e disegnarne il grafo.
- b) Trovare la distribuzione stazionaria se esiste.
- c) Dopo aver sostituito entrambi i transistor, quanto tempo bisogna attendere in media prima di effettuare una nuova sostituzione?