**CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (MODULO UNICO)**

(Prof. L. Bertini, G. Nappo, F. Spizzichino)

**Corso di Laurea in Matematica**

Si prega di scrivere il proprio nome su ogni foglio e di giustificare le risposte.

**A.** Si lancia una moneta truccata con probabilità di testa pari a $p$ e di croce pari a $q = 1 - p$, $p \in [0, 1]$. Se esce testa si pescano a caso tre carte da un mazzo di carte italiane (40 carte numerate da 1 a 10 dei semi denari, coppe, spade e bastoni), se esce croce si pescano a caso cinque carte da un mazzo di carte francesi (52 carte numerate da 1 a 13 dei semi cuori, quadri, fiori e picche).

1. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi. Tra le carte pescate vi è il 3 di picche, tra le carte pescate vi è esattamente una carta di spade, tra le carte pescate vi è almeno una carta di spade.
2. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi. Tra le carte pescate vi è esattamente un 5, tra le carte pescate vi è almeno un 5.
3. Sapendo che tra le carte pescate vi è esattamente un 5, calcolare la probabilità di aver pescato dal mazzo di carte italiane.
4. Alice vince un euro se è stato scelto il mazzo di carte italiane e, nello stesso tempo, cento euro se tra le carte pescate vi è almeno un 5. Calcolare per quale valore di $p \in [0, 1]$ è massima la probabilità che Alice vinca. Calcolare per quale valore di $p \in [0, 1]$ è massimo il valore di attesa della vincita di Alice.

**N.B.** Non è necessario effettuare i calcoli espliciti.

**B.** Siano $X_i$, $i = 1, 2, \ldots$ variabili aleatorie indipendenti con distribuzione di probabilità data da

$$\mathbb{P}(X_i = -\sqrt[4]{i}) = \mathbb{P}(X_i = \sqrt[4]{i}) = \tfrac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}\left(X_i = \tfrac{1}{i+1}\right) = \tfrac{1}{2}$$

1. Calcolare valore di attesa e varianza di $X_i$, $i = 1, 2, \ldots$
2. Calcolare $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \left\{X_i = \frac{1}{1+i}\right\}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$
3. Sia $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $n = 1, 2, \ldots$. Calcolare (dimostrando che il limite esiste) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(S_n)$.
4. Utilizzando la diseguaglianza di Chebyshev, dimostrare che per ogni $\delta > 0$ risulta
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \delta\right) = 0$$
5. Determinare un itero $N$ in modo che per ogni $n \geq N$ si abbia
$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \frac{1}{10}\right) \leq \frac{1}{60}$$