Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21

Probabilità 1, Canale 1 (Docenti: L. Bertini, V. Silvestri)

ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 11

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria *continua o discreta* positiva ($X \geq 0$) con funzione di distribuzione $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$. Dimostrare la formula

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} [1 - F(x)]\, dx$$

Esercizio 2. Le sfere di acciaio prodotte dalla ACME devono avere un diametro di $5\,\mathrm{mm}$. Sono tuttavia accettabili sfere di diametro compreso tra $4\,\mathrm{mm}$ e $6\,\mathrm{mm}$. Si assuma che i diametri delle sfere prodotte siano variabili aleatorie gaussiane indipendenti di media $5\,\mathrm{mm}$ e varianza $0.25\,\mathrm{mm}^2$.

1) Quale percentuale dei pezzi prodotti non rispetta i limiti di tolleranza?

2) Potendo ricalibrare di produzione, modificando la varianza delle sfere, si determini il valore massimo della varianza per cui la percentuale di pezzi che non rispettano i limiti di tolleranza è inferiore all'1%.

Esercizio 3. Per trasmettere un bit da una sorgente A a una ricevente B tramite una coppia di fili elettrici, si applica una differenza di potenziale di $+2\,\mathrm{V}$ per il valore 1 e di $-2\,\mathrm{V}$ per il valore 0. A causa di disturbi elettromagnetici, se A applica $\mu = \pm 2\,\mathrm{V}$, B legge $X = \mu + Z$, dove Z rappresenta il rumore, descritto da una variabile aleatoria gaussiana di media 0 e varianza $1\,\mathrm{V}^2$. Dalla lettura di X, B decodifica il messaggio con la seguente regola: se $X \geq 0.5\,\mathrm{V}$ si decodifica 1, mentre se $X < 0.5\,\mathrm{V}$ si decodifica 0.

1) Se A invia 0, calcolare la probabilità che B decodifichi 1.

2) Se A invia 1, calcolare la probabilità che B decodifichi 0.

Si supponga ora che A invii 0 o 1 con la stessa probabilità.

3) Calcolare la probabilità che B decodifichi 1.

4) Se B ha decodificato 1 calcolare la probabilità che la decodifica corrisponda al messaggio inviato.

Esercizio 4. Siano X, Y variabili aleatorie gaussiane standard (valore di attesa 0 e varianza 1) indipendenti.

1) Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria X^2.

2) Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria $X^2 + Y^2$.

Esercizio 5. Sia Z una variabile aleatoria gaussiana standard.

1) Per $k \in \mathbb{N}$ calcolare $\mathbb{E}(Z^k)$.

Siano ora $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite tali che $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ e $\mathbb{E}|X_i|^k < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Si ponga infine $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$.

2) Per $k \in \mathbb{N}$ calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n^k)$ e confrontare con il risultato del punto precedente.

Esercizio 6. Un percorso escursionistico prevede la scelta di itinerari di difficoltà crescente. In particolare, per completare l'itinerario k è necessario superare k ostacoli, $k = 1, 2, \ldots$. Supponendo che il tempo necessario per superare un ostacolo sia descritto da una variabile esponenziale con valore di attesa pari a un'ora e che ostacoli diversi siano descritti da variabili aleatorie indipendenti, rispondere alle domande seguenti.

1) Si consideri il caso in cui Alfonso sceglie il primo itinerario (quello con un solo ostacolo). Determinare la probabilità con cui completa il percorso in meno di un ora.

2) Si consideri il caso in cui Alfonso sceglie il k-esimo itinerario (quello con k ostacoli) con probabilità pari a $(1-p)^{k-1}p$. $k = 1, 2, \ldots$, con $p \in (0, 1)$. Determinare il valore di attesa del tempo in cui completa il percorso.

3) Si consideri il caso in cui Alfonso sceglie il k-esimo itinerario (quello con k ostacoli) con probabilità pari a $(1-p)^{k-1}p$. $k = 1, 2, \ldots$, con $p \in (0, 1)$. Determinare la distribuzione del tempo in cui completa il percorso.

4) Vi sono 1000 escursionisti che scelgono il primo itinerario. Utilizzando l'approssimazione gaussiana, determinare la probabilità che almeno 600 escursionisti completino il percorso in meno di un ora.

Esercizio 7. Durante il regno di Mongke Khan, la posta viaggiava lungo la strada dello Yam. A distanze regolari i postini potevano utilizzare delle stazioni per cambiare i cavalli e percorrere migliaia di chilometri con facilità. Supponiamo che un messo debba compiere un lungo viaggio passando per $n = 400$ stazioni di servizio (oltre a quella di partenza) per portare a destinazione un messaggio di Mongke Khan. Sia T_i il tempo impiegato a coprire il percorso tra la $i-1$-esima e la i-esima stazione. Assumiamo che le $(T_i)_{i=1}^{400}$ siano delle variabili aleatorie indipendenti, identicamente distribuite e tali che

$$\mathbb{P}(T_i \geq t) = (1 + \lambda t)\exp(-\lambda t) \qquad \forall t \geq 0,\, i = 1, \ldots, 400$$

per un'opportuna costante $\lambda > 0$.

1) Tale equazione identifica la legge di T_i?

2) Calcolare la densità di probabilità di T_i.

3) Calcolare il valore di attesa e la varianza di T_i.

Prima di partire, il messo deve stimare il tempo di percorrenza $\sum_{i=1}^{400} T_i$ del suo viaggio. Egli deve comunicare al Mongke Khan un tempo stimato τ, tale che la probabilità che egli impieghi più di τ ad arrivare a destinazione sia minore del 5%.

4) Supponendo che il messo disponesse delle tavole dell'integrale gaussiano[1], ed effettuando la dovuta approssimazione, determinare la migliore scelta di τ (in funzione di λ).

Esercizio 8.* (Convergenza della binomiale alla poissoniana con stima dell'errore)

1) Siano X, Y due variabili aleatorie sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in $\mathbb{Z}_+$. Siano inoltre $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ le distribuzioni di X, Y. Dimostrare la diseguaglianza

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) \leq \mathbb{P}(X \neq Y).$$

2) Sia X una variabile aleatoria di Bernoulli di parametro $p \in [0,1]$ e Y una variabile aleatoria di Poisson anch'essa di parametro p. Realizzare X e Y sullo stesso spazio di probabilità in modo che

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \leq p^2.$$

3) Dati $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ed $n \in \mathbb{N}$ con $\lambda/n \leq 1$ siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili di Bernoulli (tra loro indipendenti) di parametro λ/n e $Y_1, \ldots, Y_n$ variabili di Poisson (tra loro indipendenti) di parametro λ/n. Realizzare queste variabili aleatorie sullo stesso spazio di probabilità in modo che

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i\Big) \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

4) Dati $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ed $n \in \mathbb{N}$ con $\lambda/n \leq 1$ sia $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ la distribuzione bionomiale di parametri n e λ/n e μ la distribuzione di Poisson di parametro λ. Dimostrare che

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu_n, \mu) \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

[1]Le tavole dell'integrale gaussiano furono tra le prime tavole numeriche di funzioni speciali ad essere compilate. Comunque oltre cinque secoli dopo il Mongke Khan.