Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
Probabilità 1, Canale 1 (Docenti: L. Bertini, V. Silvestri)
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 9

Esercizio 1. Siano T_1 e T_2 due variabile aleatorie indipendenti e geometriche rispettivamente di parametri p_1 e p_2.

1) Calcolare $\mathbb{P}(T_1 = T_2)$.

2) Calcolare $\mathbb{P}(T_1 \geq 2T_2)$.

3) Determinare la distribuzione della variabile aleatoria $\min\{T_1, T_2\}$.

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{Z}_+$, dimostrare che

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Esercizio 3. Da un gruppo di 7 batterie, di cui 3 nuove, 2 usate ma funzionanti e 2 difettose, ne vengono scelte 3 a caso. Siano X e Y rispettivamente il numero di batterie nuove e usate (ma funzionanti) tra quelle scelte.

1) Determinare la distribuzione congiunta di (X, Y) e le distribuzioni marginali di X e di Y.

2) Calcolare $\text{cov}(X, Y)$. Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

3) Le tre batterie scelte sono montate su di un apparecchio che funziona se nessuna di esse è difettosa. Determinare la probabilità che l'apparecchio funzioni.

Esercizio 4. (COSTRUZIONE INTERVALLI DI CONFIDENZA) Si consideri una moneta truccata con parametro di truccatura p incognito. Al fine di determinare p, si lancia la moneta n volte e si stima p con S_n/n, ove S_n è il numero di teste negli n lanci effettuati. Utilizzando la diseguaglianza di Chebyshev, dato $\delta > 0$ determinare quanto grande deve essere n affiché la probabilità che $|S_n/n - p| < \delta$ sia almeno il 95%.

Esercizio 5. I componenti elettronici prodotti in una fabbrica sono difettosi, l'uno indipendentemente dall'altro, con probabilità p e funzionanti con probabilità $1 - p$, $p \in (0, 1)$. Vengono sottoposti ad un controllo di qualità con la seguente modalità: ogni componente, l'uno indipendentemente dall'altro, viene ispezionato con probabilità α e non ispezionato con probabilità $1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Un componente trovato difettoso viene scartato, mentre gli altri vengono messi in commercio. Si supponga di avere n componenti prodotti dalla fabbrica.

1) Calcolare la distribuzione del numero di componenti che vengono scartati dopo il controllo di qualità.

2) Sapendo che il numero di componenti scartati dopo il controllo di qualità è pari a k, $k = 0, 1, \ldots, n$, calcolare la distribuzione dei componenti difettosi tra gli $n - k$ messi in commercio.

3) Siano X il numero di componenti messi in commercio e Z il numero di componenti difettosi messi in commercio. Calcolare $\mathbb{E}(Z/X|X)$ e $\mathbb{E}(Z/X)$.

Esercizio 6. Siano X e Y variabili aleatorie di Poisson indipendenti rispettivamente di parametro λ e μ. Calcolare $\mathbb{E}(X|X+Y)$ e $\mathbb{E}(X+Y|X)$.

Esercizio 7. (Convergenza in probabilità di variabili aleatorie) Sia X_n una successione di variabili aleatorie che converge in probabilità a $m \in \mathbb{R}$, ovvero per ogni $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|X_n - m| \geq \delta\big) = 0.$$

1) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che la successione di variabili aleatorie $Y_n := f(X_n)$ converge in probabilità a $f(m)$.

2) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Dimostrare che la successione (numerica) $\mathbb{E}\big(f(X_n)\big)$ converge a $f(m)$.

3) Costruire un esempio in cui X_n converge in probabilità a 0, ma $\mathbb{E}(X_n)$ non converge a 0.

Dimostrare infine che X_n converge in probabilità a m se e solo se $\mathbb{E}\big(f(X_n)\big)$ converge a $f(m)$ per ogni funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e limitata.

Esercizio 8.* (Variante teorema di Poisson) Sia X_n una successione di variabili aleatorie a valori in $\mathbb{Z}_+$ e X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{Z}_+$. Per definizione (provvisoria), X_n converge in legge a X se e solo se per ogni $k \in \mathbb{Z}_+$ si ha $\lim_n \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.

1) Sia X_n una successione di variabili aleatorie che converge in legge a X ed Y_n una successione di variabili aleatorie (sempre a valori in $\mathbb{Z}_+$) che converge a zero in probabilità, ovvero tale che $\lim_n \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1$. Dimostrare che la successione di variabili aleatorie $X_n + Y_n$ converge in legge a X.

2) Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite a valori in $\mathbb{Z}_+$ soddisfacenti $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_n - q_n$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_n$, $\mathbb{P}(X_i \geq 2) = q_n$ con $p_n, q_n > 0$ tali che $np_n \to \lambda$ e $nq_n \to 0$. Posto $Z_n := \sum_{i=1}^n X_i$, dimostrare che Z_n converge in legge ad una variabile di Poisson di parametro λ.