Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
**Probabilità 1**, Canale 1 (Docente: L. Bertini)
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

## SETTIMANA 8

**Esercizio 1.** Un dado equo viene lanciato finché non esce 5 o 6. Sia $T$ il numero totale di lanci effettuati e $X$ il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

*1)* Calcolare $\mathbb{P}(T = 3, X = 5)$.

*2)* Calcolare la distribuzione di $T$.

*3)* Calcolare la distribuzione di $X$.

*4)* Dire, giustificando la risposta, se sono variabili aleatorie $T$ e $X$ sono indipendenti.

**Esercizio 2.** Quante volte bisogna lanciare – in media – un dado equo per vedere apparire tutte le faccie?
SUGG. Utilizzando variabili aleatorie geometriche si trova la soluzione senza necessità di calcoli.

**Esercizio 3.** In uno schema di Bernoulli con probabilità di testa $p \in (0, 1)$ sia $X$ la variabile aleatoria che conta il numero di risultati uguali al primo; ovvero $X = 1$ se il primo lancio è testa e il secondo croce oppure il primo croce ed il secondo testa, $X = 2$ se due teste e poi una croce oppure due croci e poi una testa,...

*1)* Trovare la distribuzione di $X$.

*2)* Calcolare il valore di attesa di $X$.

*3)* Calcolare la varianza di $X$.

**Esercizio 4.** Siano $X_i$, $i = 1, 2, 3$ variabili aleatorie indipendenti uniformi in $\{1, \dots, n\}$.

*1)* Calcolare la distribuzione di $X_1 + X_2$.

*2)* Calcolare la distribuzione di $X_1 + X_2 + X_3$.

**Esercizio 5.** Una moneta con probabilità di testa pari a $p \in [0, 1]$ viene lanciata un numero di volte aleatorio (indipendente dai risultati dei lanci della moneta) con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Trovare le dstribuzioni del numero totale di teste e croci otteneute e dimostrare che queste due variabili aleatorie sono indipendenti.

**Esercizio 6.** Si consideri la disposizione casuale di $n$ palline in $k$ scatole: ogni pallina sceglie, indipendentemente dalle altre, una scatola con probabilità uniforme. Sia $X_i = 0, \dots, n$ il numero di palline nella scatola $i$, con $i = 1, \dots, k$.

*1)* Calcolare la distribuzione di $X_1$.

*2)* Calcolare la covarianza tra $X_1$ e $X_2$.

Si consideri il limite in cui $k, n \to \infty$ con $\frac{n}{k} \to \lambda \in (0, +\infty)$

*3)* Calcolare la distribuzione limite di $X_1$.

*4)* Dimostrare che in questo limite le variabili aleatorie $X_1$ e $X_2$ diventano indipendenti.

**Esercizio 7.** Siano $Z_1, \dots, Z_k$ variabili aleatorie di Poisson di parametro $\lambda \in (0, \infty)$ indipendenti.

*1)* Calcolare la distribuzione di $Z_1$ condizionata all'evento $Z_1 + \dots + Z_k = n$, $n \in \mathbb{N}$, ovvero
$$\mu_1(z|n) := \mathbb{P}\big(Z_1 = z \big| Z_1 + \dots + Z_k = n\big).$$
*2)* Calcolare la distribuzione di $Z_1$ e $Z_2$ condizionata all'evento $Z_1 + \dots + Z_k = n$, $n \in \mathbb{N}$, ovvero
$$\mu_{12}(z_1, z_2|n) := \mathbb{P}\big(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2 \big| Z_1 + \dots + Z_k = n\big).$$
*3)* Condizionatamente all'evento $Z_1 + \dots + Z_k = n$, $n \in \mathbb{N}$, calcolare la covarianza tra $Z_1$ e $Z_2$, ovvero:
$$\operatorname{cov}(Z_1, Z_2|n) := \sum_{z_1, z_2} z_1 z_2 \mu_{12}(z_1, z_2|n) - \sum_{z_1, z_2} z_1 \mu_{12}(z_1, z_2|n) \sum_{z_1, z_2} z_2 \mu_{12}(z_1, z_2|n).$$
*4)* Confrontare i risultati con quelli ottenuti nell'esercizio precedente.

**Esercizio 8.*** (Ancora sul problema dell'album di figurine) Si consideri un album con $n$ figurine per completare il quale si acquista una figurina al giorno (si supponga probabilità uniforme sulla distribuzione della figurina comprata ciascun giorno ed indipendenza tra figurine comprate in giorni diversi).

*1)* Dimostrare che il valore di atteso del numero di giorni necessari per completare l'album è dato da
$$K_n = n\Big[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\Big].$$
*2)* Dimostrare l'asintotica
$$K_n = n\Big[\log n + \varkappa + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]$$
per un opportuna costante $\varkappa \in \mathbb{R}$ (è richiesto trovare una formula per $\varkappa$, ma non il suo calcolo esplicito).

*3)* Trovare la varianza del numero di giorni necessari per completare l'album.

Sugg. Ragionare in termini di variabili aleatorie geometriche.