Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
Probabilità 1, Canale 1 (Docente: L. Bertini)
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 7

Esercizio 1. Lanciando un dado equo a 6 facce, sia X il risultato ottenuto.

1) Calcolare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore atteso di X.
3) Calcolare la varianza di X.

Rispondere alle precedenti domande nel caso in cui il dado abbia $n \in \mathbb{N}$ facce.

Esercizio 2. Lanciando due dadi equi a 6 facce, sia X il minimo tra i due risultati.

1) Calcolare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore atteso di X.

Rispondere alle precedenti domande nel caso in cui il dado abbia $n \in \mathbb{N}$ facce.

Esercizio 3. Si consideri un esame a risposta multipla organizzato al modo seguente. In totale ci sono 10 domande e per ogni domanda ci sono 4 possibili risposte, di cui una sola è corretta. L'algoritmo di valutazione è il seguente: ogni risposta giusta vale 3 e ogni risposta sbagliata (o non risposta) vale -1. Alice risponde a caso a tutte le 10 domande.

1) Calcolare la probabilità che Alice ottenga la sufficenza (18/30).
2) Calcolare il valore di attesa del voto di Alice.
3) Calcolare la varianza del voto di Alice.

Esercizio 4. Una scatola contiene 10 transistor di cui 3 sono rotti. Si esamina un transistor alla volta (senza rimpiazzo) finché non se ne trova uno rotto. Calcolare il valore di attesa del numero di transistor esaminati.

Esercizio 5. (INDIPENDENZA DI VARIABILI ALEATORIE) Siano X e Y due variabili aleatorie.

1) Dimostrare che se X è una variabile aleatoria certa, ovvero $X = c$ per un qualche $c \in \mathbb{R}$, allora X e Y sono indipendenti.
2) Dimostrare che nel caso in cui X e Y sono binarie, ovvero $\big|\mathrm{Im}(X)\big| = \big|\mathrm{Im}(Y)\big| = 2$, le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti se e solo se $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.
3) Costruire un esempio in cui $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ ma X e Y non sono indipendenti.

Esercizio 6. (DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA DEL PRINCIPIO DI INCLUSIONE ESCLUSIONE)

1) Siano A e B eventi. Verificare che $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$ e che $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
2) Siano $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Convincersi della validità dell'identità (binomiale):

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \prod_{i\in I} a_i \prod_{j\in I^c} b_j.$$

3) Utilizzare i due punti precedenti e le proprietà del valore atteso per dimostrare il principio di inclusione esclusione.

Esercizio 7.* (VARIABILE ALEATORIA IPERGEOMETRICA) Si consideri un'urna con b palline bianche ed n palline nere. Si effettuano k estrazioni senza rimpiazzo ($k \leq b+n$). Sia X_i, $i = 1, \ldots, k$ la variabile aleatorie che vale 1 se l'i-ma pallina estratta è bianca e 0 se nera. Sia inoltre X il numero totale di palline bianche estratte.

1) Trovare la distribuzione di X.

2) Calcolare il valore di attesa di X.
(È richiesto sia il calcolo diretto a partire dalla distribuzione di X sia quello a partire dal valore di attesa di X_i.)

3) Calcolare la covarianza tra X_i e X_j, $i, j = 1, \ldots, k$.

4) Calcolare la varianza di X.
(È richiesto sia il calcolo diretto a partire dalla distribuzione di X sia quello svolto scrivendo $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ ed usando la risposta alla domanda precedente.)