Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
Probabilità 1, Canale 1 (Docente: L. Bertini)
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 5

Esercizio 1. È noto che i gemelli possono essere omozigoti, in questo caso sono necessariamente dello stesso sesso, oppure eterozigoti, e in questo caso sono dello stesso sesso nel 50% dei casi. Sia p la probabilità che due gemelli siano omozigoti.

1) Calcolare, in funzione di p, la probabilità che 2 gemelli siano omozigoti sapendo che sono dello stesso sesso.

2) Calcolare, in funzione di p, la probabilità che 2 gemelli siano di sesso diverso.

Esercizio 2. Un canale di comunicazione trasmette segnali binari. A causa del rumore di fondo alcune volte viene trasmesso 0, ma è ricevuto 1; altre volte viene trasmesso 1 e ricevuto 0. Si assuma che

- la probabilità che uno 0 sia ricevuto correttamente è 0.94;
- la probabilità che un 1 sia ricevuto correttamente è 0.91.

Viene spedito un singolo bit, che con probabilità 0.45 è uno 0 e con probabilità 0.55 e un 1. Calcolare:

1) la probabilità che venga ricevuto 1;

2) la probabilità che venga ricevuto 0;

3) la probabilità che sia stato trasmesso 1 se si è ricevuto 1;

4) la probabilità che sia stato trasmesso 0 se si è ricevuto 0;

5) la probabilità che si verifichi un errore di trasmissione.

Esercizio 3. Si consideri un'urna contenente una pallina rossa ed una verde. Si estrae una prima pallina e, osservatone il colore, la si reimmette nell'urna con una pallina dello stesso colore. Vengono effettuate di seguito altre 2 estrazioni, modificando di volta in volta la composizione dell'urna con la regola illustrata sopra. Sia R_i, per $i = 1, 2, 3$, l'evento "l'i-esima pallina estratta è rossa".

1) Calcolare $\mathbb{P}(R_1|R_2)$.

2) Calcolare $\mathbb{P}(R_3|R_2)$.

3) Calcolare $\mathbb{P}(R_1|R_3)$.

Esercizio 4. In un'urna ci sono tre monete: la prima è equa ed ha testa (T) su di una faccia e croce (C) sull'altra, la seconda ha C su entrambe le facce, la terza ha T su entrambe le facce.

1) Si estrae a caso una moneta dall'urna e la si lancia senza guardare di quale moneta si tratti. Calcolare la probabilità che esca T.

2) Si raccoglie ora la moneta (senza guardare che moneta sia) e la si lancia nuovamente. Calcolare la probabilità che la moneta renda ancora T.

3) La procedura descritta nel punto precedente viene ripetuta n volte e la moneta rende T ogni volta. Calcolare, in funzione di n, la probabilità che la moneta sia quella con T su entrambe le facce.

Esercizio 5. Tre sentieri collegano i bivacchi A, B e C in modo che da ciascun bivacco si possa raggiungere uno qualunque degli altri due con un sentiero diretto. A causa di frane, ciascun sentiero può essere non percorribile. Sia $p_{AB} \in (0,1)$ (rispettivamente p_{BC}, p_{AC}) la probabilità che il sentiero che collega A con B (rispettivamente B con C, A con C) sia percorribile. Si assuma che lo stato di agibilità di ciascun sentiero sia indipendente dagli altri. Vi trovate al bivacco A.

1) Calcolare la probabilità che possiate arrivare al bivacco C.

2) Un alpinista vi ha detto che non è possibile arrivare a C per via delle frane. Calcolare la probabilità che possiate comunque arrivare a B.

Supponiamo ora che tra A e B via siano 3 sentieri diretti, ciascuno percorribile con probabilità q indipendentemente dagli altri.

3) Calcolare le due probabilità precedenti (senza rifare tutti i calcoli).

Esercizio 6. (The Monty Hall problem: capre e automobili) In uno spettacolo televisivo, uno spettatore deve scegliere una porta fra tre. Una delle porte nasconde un'automobile nuova, le altre due, una vecchia capra ciascuna dette capra A e capra B. Il contenuto della porta scelta sarà il premio assegnato allo spettatore. Una volta fatta la scelta la porta non viene aperta ma il presentatore apre invece una fra le due porte non scelte che rivela una capra. Il presentatore poi offre allo spettatore la possibilità di cambiare la porta da lui inizialmente scelta con l'altra porta ancora chiusa. Sia p la probabilità (condizionata) che la porta così offerta contenga l'automobile. Verificare che:

1) $p = 2/3$ se la strategia del presentatore è quella di mostrare sempre una capra, senza preferenze tra le capre.

2) $p = 1/2$ se il presentatore apre una porta a caso.

3) $p = 1/(1 + a)$ se si vede la capra A e la strategia del presentatore è quella di mostrare sempre una capra e nel caso ci siano 2 capre mostrare la capra A con probabilità a.

Esercizio 7. Sia S un inieme di cardinalità n. Si scelgono a caso (con 'rimpiazzo') due sottoinsiemi di S. Calcolare la probabilità che il primo sottoinsieme scelto sia incluso nel secondo.

Esercizio 8.* (Problema delgli accoppiamenti via probabilità condizionata) Si consideri il problema degli accopiamenti, ovvero la scelta casuale di una permutazione di $\{1, \dots, n\}$.

1) Sia q_n la probabilità che la permutazione scelta non abbia punti fissi. Condizionando rispetto all'immagine del punto 1 ed utilizzando la formula delle probabilità totali ricavare una formula ricorsiva per q_n in funzione di q_{n-1} e q_{n-2}.
Sugg. Se 1 finisce in i con $i \neq 1$ distinguere i casi in cui i è finito in 1 oppure no.

2) Risolvere la ricorsione e riottenere la stessa espressione ricavata via inclusione/esclusione.

3) Utilizzare lo stesso metodo per ricavare la probabilità che una permutazione scelta a caso abbia (esattamente) k punti fissi, $k = 0, \dots, n$.