Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
Probabilità 1, Canale 1 (Docente: L. Bertini)
Esercizi settimanali

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

Settimana 4

Esercizio 1. Vengono lanciati 2 dadi regolari.

1) Mostrare che l'evento "la somma dei dadi fa sette" è indipendente dal risultato del primo dado.

2) Mostrare che l'evento "la somma dei dadi fa nove" non è indipendente dal risultato del primo dado.

3) Dare una spiegazione intuitiva della diversità tra i due casi precedenti.

Esercizio 2. Siano $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ eventi. Dimostrare che $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ sono indipendenti se e solo se $\{A_i^c\}_{i=1,\dots,n}$ sono indipendenti.

Esercizio 3. Per $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$ si consideri la distribuzione binomiale (numero di teste in n lanci di moneta truccata)

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, \dots, n.$$

Dimostrare che $P(k)$ è crescente per $k \le \bar{k}$ per un oppurtuno $\bar{k} = \bar{k}(n,p)$ (da trovare) e decrescente per $k > \bar{k}$.

Esercizio 4. Si dispone di una moneta truccata con parametro di truccatura p incognito che si vuole determinare con il criterio di *massima verosimiglianza*, ovvero determinando il valore $\hat{p}$ che massimizza la probabilità dell'evento osservato.

1) Si lancia la moneta n volte ottenendo testa k volte. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per p.

2) Si lancia la moneta finché si ottiene una testa, diciamo al h-esimo lancio. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per p.

Esercizio 5.

1) Siano $B, N, n \in \mathbb{N}$ con $B, N \ge n$. Dimostrare mediante un'interpretazione probabilistica la formula

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{B}{k} \binom{N}{n-k} = \binom{N+B}{n}.$$

2) Per $x \in \mathbb{R}$ e $B, N \in \mathbb{N}$ si consideri l'identità

$$(1+x)^{N+B} = (1+x)^N (1+x)^B.$$

Utilizzando lo sviluppo del binomio e il principio di identità dei polinomi dimostrare la formula del punto precedente senza alcuna interpretazione probabilistica.

3) Alice e Bob lanciano una moneta equa n volte ciascuno. Calcolare la probabilità che ottengano lo stesso numero di teste.

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ si definisce $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ e, per convenzione, $\binom{\alpha}{0} := 1$.

4) * Verificare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in (-1,1)$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

5) * Dire se la formula del punto 1. è vera per ogni $B, N \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. (Un teorema limite per la distribuzione ipergeometrica) Per $n, b, k \in \mathbb{N}$, si consideri la *distribuzione ipergeometrica*

$$P_{n,b,k}(h) = \frac{\binom{b}{h}\binom{n}{k-h}}{\binom{b+n}{k}}, \qquad h = 0, \dots, k.$$

1) Calcolare il limite di $P_{n,b,k}$ per $b, n \to \infty$ con $b/(b+n) \to p \in (0,1)$ (k è fisso).

2) Discutere l'interpretazione del risultato, per esempio considerando un problema di estrazioni da urne.

Esercizio 7. Si considerino lanci ripetuti di una moneta truccata in modo che la probabilità di ottenere testa sia $p \in (0,1)$. Dati $a, b \geq 1$, calcolare la probabilità che la moneta renda a volte testa prima di b volte croce.

Esercizio 8. In una città con $n+1$ abitanti una persona è infetta. Costui infetta un altro abitante scelto a caso tra i possibili n, il secondo a sua volta infetta un abitante scelto a caso i possibili n (l'infezione può quindi tornare all'infetto originario), e così via.

1) Calcolare la probabilità che l'infezione si propaghi k volte senza ritornare alla fonte.

2) Calcolare la probabilità che l'infezione si propaghi k volte senza che colpisca più di una volta lo stesso abitante.

*Rispondere alle domande precedenti nel caso in cui l'infezione venga diffusa contemporaneamente a $m < n$ persone diverse scelte a caso tra le possobili n (il caso svolto prima corrisponde a $m = 1$).