Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

Settimana 3

Esercizio 1. Carletto deve fare il compito in classe di matematica. Nel sussidiario ci sono 50 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 30 di geometria non commutativa e 10 di statistica bayesiana. Carletto non sa assolutamente nulla di tali materie, impara quindi a memoria 20 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 10 di geometria non commutativa e 5 di statistica bayesiana. Al momento del compito, Carletto svolge solo gli esercizi che ha imparato a memoria.

1) Se la maestra prepara un compito scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 4 esercizi di geometria commutativa, con quale probabilità Carletto riesce a svolgere tutti gli esercizi di geometria commutativa?

Si supponga invece che la maestra prepari il compito scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 5 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 4 esercizi di geometria non commutativa e 1 esercizio di statistica bayesiana.

2) Quanti compiti diversi può preparare la maestra? (compiti che differiscono solo per l'ordine degli esercizi non sono considerati diversi)

3) Con quale probabilità Carletto svolge tutti i 10 esercizi?

4) Con quale probabilità Carletto svolge 3 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 2 di geometria non commutativa e 1 di statistica bayesiana?

Esercizio 2. Alice (A), Barbara (B) e Carlo (C) competono tra loro in un torneo con le seguenti modalità. Nel primo incontro si sfidano A e B. Il vincitore gioca poi contro C, se vince anche questo incontro è proclamato vincitore assoluto; se invece vince C, costui gioca contro il perdente dell'incontro precedente e così di seguito. Il primo giocatore a vincere due incontri consecutivi vince il torneo. Si tenga presente che A,B,C hanno la stessa abilità nel gioco e pertanto ogni incontro è vinto da uno dei due contendenti con probabilità 1/2.

1) Calcolare la probabilità che il torneo finisca dopo n incontri, $n \geq 2$.

2) Calcolare le probabilità di vittoria per A,B e C.

3) Il torneo potrebbe non avere mai termine?

Esercizio 3. (Coupon collector) Si consideri un album con n figurine.

1) Calcolare la probabilità di completare l'album comprando k figurine, $k \geq n$ (si supponga probabilità uniforme sulla k-pla di figurine comprate).

2) Utilizzando la subadditività della probabilità, dare una stima, senza usare la calcolatrice, di quante figurine bisogna acquistare per avere una probabilità superiore al 90% di completare un album di 100 figurine.

3) Se si acquista una figurina al giorno, calcolare la probabilità di completare l'album esattamente dopo k giorni, $k \geq n$.

Esercizio 4. Armando gioca 10 partite alla roulette puntando sul rosso 1 euro a partita. La probabilità di vincere una singola partita è 18/37

1) Calcolare la probabilità che Armando vinca per la prima volta alla quinta partita.

2) Calcolare la probabilità che armando vinca almeno 2 partite.

3) Calcolare la probabilità che alla fine delle 10 partite il capitale di Armando sia aumentato di 2 euro.

Esercizio 5. (Formula di Stirling) Lo scopo di questo esercizio è dimostrare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

svolgendo i seguenti passi.

1) Via integrazione per parti, verificare che

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt$$

2) Via cambi di variabile, verificare che

$$n! = n^{n+1}e^{-n}\int_{-1}^{\infty} e^{-n\phi(t)}\, dt, \qquad \phi(t) = t - \log(1+t).$$

Osservare che ϕ è convessa ed assume minimo per $t = 0$.

3) L'approssimazione di Stirling si ottienere ora sostituendo a ϕ il suo sviluppo quadratico intorno al minimo. Più precisamente, utilizzando $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \sqrt{2\pi}$, si verifichi che

$$n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} = n^{n+1}e^{-n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\frac{1}{2}t^2}\, dt.$$

A questo punto l'affermazione voluta è equivalente a (verificare!)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\Big\{ \int_{-1}^{\infty} e^{-n\phi(t)}\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\frac{1}{2}t^2}\, dt \Big\} = 0 \tag{1}$$

4) Si consideri il contributo degli integrali in (1) per $|t| < 1/n^\alpha$. Utilizzando lo sviluppo di Taylor, verificare che se $\alpha > 3/8$ tale contributo converge effettivamente a zero.

5) Si consideri il contributo del secondo integrale in (1) per $|t| > 1/n^\alpha$. Via calcolo diretto verificare che se $\alpha < 1/2$ tale contributo converge effettivamente a zero.

6) Si consideri infine il contributo del primo integrale in (1) negli intervalli $(-1, -1/n^\alpha)$ e $(1/n^\alpha, \infty)$. Utilizzando la convessità di ϕ (ϕ è "sopra" la retta tangente) verificare che se $\alpha < 1/2$ tale contributo converge effettivamente a zero.

Esercizio 6.* Due numeri sono estratti a caso con rimpiazzo da $\{1, \dots, n\}$.

1) Calcolare la probabilità q_n che i due numeri estratti siano primi tra loro (ovvero non abbiano divisori comuni). [Sugg. Utilizzare il principio di esclusione/inclusione]

2) Indicando con $\mathcal{P}$ i numeri primi, verificare che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = \prod_{p\in\mathcal{P}}\Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big)$

3) Dimostrare l'identità $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

[Sugg. Utilizzare la serie geometrica ed il teorema fondamentale dell'aritmetica]

Oss. Poiché $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (la dimostrazione di questa identità non è però richiesta), si conclude che $\lim_{n\to\infty} q_n = 6/\pi^2$.