Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
Probabilità 1, Canale 1 (Docente: L. Bertini)
Esercizi settimanali

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

Settimana 1

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti relazioni insiemistiche:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}$$

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, e siano A, B e C tre eventi. Supponiamo di sapere $A \cap B \cap C = \emptyset$ e $\mathbb{P}(A \cap C) = 1/5$ e $\mathbb{P}(B \cap C) = 2/5$.

1) Calcolare $\mathbb{P}((A \cup B) \cap C)$

2) Quali sono i possibili valori di $\mathbb{P}(A \cap B)$? (Ad esempio, può essere $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$?)

Esercizio 3.

1) Se $\mathbb{P}(A) = 1/3$ e $\mathbb{P}(B^c) = 1/4$, A e B possono essere eventi disgiunti?

2) Se $\mathbb{P}(A) = 1/4$ e $\mathbb{P}(A \cup B) = 3/4$, quanto vale $\mathbb{P}(B)$ nel caso che A e B siano disgiunti?

3) Se $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 3/8$, può verificarsi che $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/4$? E $\mathbb{P}(A \cup B) = 7/8$?

4) Siano $\mathbb{P}(A) = 3/4$ e $\mathbb{P}(B) = 3/8$. Si verifichi che $1/8 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 3/8$.

5) Si dimostri la diseguaglianza:

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

Esercizio 4. Sia A, B e C eventi di uno spazio di probabilità. Esprimere la probabilità che almeno uno di essi si verifichi in termini delle probabilità di A, B, C e delle loro intersezioni.

Esercizio 5. La prima sessione di esami del II semestre prevede gli esami A, B e C. Le percentuali di studenti promossi sono le seguenti:

- 40% per l'esame A,
- 50% per l'esame B,
- 30% per l'esame C,
- 35% per gli esami A e B,
- 20% per gli esami A e C,
- 25% per gli esami B e C,
- 15% per tutti e tre gli esami

Determinare la probabilità che nella prima sessione uno studente (suggerimento: utilizzare l'esercizio precedente):

1) non superi l'esame A;

2) superi A ma non superi B;

3) superi almeno un esame;

4) non superi alcun esame.

Esercizio 6. Si lanciano 2 dadi equi, uno di colore rosso, l'altro di colore blu.

1) Descrivere lo spazio degli eventi elementari Ω.

2) Descrivere, come sottoinsiemi di Ω, i seguenti eventi: "il dado rosso vale 5", "uno dei due dadi vale 5", "entrambi i dadi valgono 5", "nessun dado vale 5", "la somma dei dadi vale 5".

3) Calcolare la probabilità degli eventi nel punto precedente.

Esercizio 7. Sia Ω un insieme finito non-vuoto ed $H \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data. Per ogni $\beta \geq 0$, definiamo una probabilità $\mathbb{P}_\beta$ su Ω ponendo per ogni $\omega \in \Omega$ (si ricordi che su spazi finiti la probabilità è identificata dal suo valore sui singoletti)

$$\mathbb{P}_\beta(\{\omega\}) = \frac{e^{-\beta H(\omega)}}{Z_\beta}$$

dove Z_β è un numero reale positivo. Poniamo inoltre

$$m := \min_{\omega\in\Omega} H(\omega) \qquad E_m := \{\omega \in \Omega \,:\, H(\omega) = m\} = H^{-1}(\{m\})$$

1) Si scriva Z_β in funzione di β (ed H).

2) Verificare che se $\beta = 0$ allora $\mathbb{P}_\beta$ è la probabilità uniforme su Ω.

3) Verificare che

$$\lim_{\beta\to+\infty} \mathbb{P}_\beta(E_m) = 1$$

(o, come si dice, che $\mathbb{P}_\beta$ si concentra sui minimi di H quando $\beta \to +\infty$).

4) Calcolare $\lim_{\beta\to+\infty} \mathbb{P}_\beta(\{\omega\})$ per ogni $\omega \in \Omega$.

Esercizio 8.* (Asintotica del problema dei compleanni) Sia

$$p_N(k) = 1 - \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{N^k}$$

la probabilità per il problema dei compleanni. Si osservi che, per k fissato, $p_N(k)$ è un polinomio in $1/N$. Si consideri l'asintotica per k fisso e $N \to \infty$.

1) Dimostrare che

$$p_N(k) = C_1(k)\frac{1}{N} + o\big(\tfrac{1}{N}\big)$$

e calcolare $C_1(k)$.

2) Dimostrare che

$$p_N(k) = C_1(k)\frac{1}{N} + C_2(k)\frac{1}{N^2} + o\big(\tfrac{1}{N^2}\big)$$

e calcolare $C_2(k)$.

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
Probabilità 1, Canale 1 (Docente: L. Bertini)
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 2

Esercizio 1. Un'associazione è formata da 25 iscritti. Tra questi devono essere scelti un presidente ed un segretario (lo stesso associato non può ricoprire entrambe le cariche).

1) Quanti sono i modi possibili per ricoprire le due cariche?
2) Se gli individui vengono scelti a caso per ricoprire le cariche, qual è la probabilità che un assegnato membro dell'associazione ne ricopra una?
3) Si supponga ora che nella medesima associazione debbano essere scelti due sguatteri. Quante sono le possibili scelte?

Esercizio 2. Quanti sono gli anagrammi (anche senza senso) delle parole: RISO, PATATE e COZZE.

Esercizio 3. Vengono estratte 5 carte a caso da un mazzo di 52 carte francesi. Calcolare la probabilità di ottenere:

1) poker;
2) colore;
3) full;
4) doppia coppia (ma non un full);
5) tris (ma né poker né full).

Esercizio 4. In un dipartimento di psicostoria, le aule I e II possono accogliere 50 studenti ciascuna, mentre l'aula III può accoglierne 100. Per seguire il corso di probabilità in tali aule, 200 matricole vengono divise in tre gruppi (di 50, 50 e 100 studenti).

1) In quanti modi si possono creare i tre gruppi?
2) In quanti modi si possono assegnare gli studenti nelle tre aule?

Alyona e Bogdana vorrebbero seguire il corso insieme per aiutarsi nello studio, ma vorrebbero evitare di ritrovarsi in classe con l'insopportabile Vadik.

3) Supponendo venga effettuata una divisione casuale degli studenti nelle aule, calcolare la probabilità che tale desiderio si avveri.

Esercizio 5. Un mazzo di carte napoletane è costituito da 40 carte di 4 semi distinti (denominati denari, coppe, spade e bastoni), numerate dall'asso al re.

In una partita di tresette si distribuiscono 10 carte a ciascuno dei 4 giocatori. Un giocatore ottiene una *napoletana* se riceve asso, due e tre dello stesso seme.

Voi siete al tavolo, e ricevete la vostra mano di 10 carte.

1) Calcolare la probabilità che otteniate una napoletana di bastoni (asso, due e tre di bastoni).
2) Calcolare la probabilità che otteniate contemporaneamente una napoletana di bastoni e di coppe.
3) Calcolare la probabilità che otteniate almeno una napoletana.

Esercizio 6. Alfredo e Bianca escono la sera con 5 amici. Cominciano la serata con un aperitivo al bar. Davanti al bancone ci sono 7 sgabelli vuoti in fila e ciascuno sceglie uno sgabello a caso. Qual è la probabilità che Alfredo e Bianca si siedano vicini? Dopo si recano al ristorante, dove gli viene assegnato un tavolo rotondo con 7 sedie e ciascuno sceglie una sedia a caso. Qual è la probabilità che Alfredo e Bianca si siedano vicini?

Esercizio 7. Siano S, S' insiemi finiti con $|S| = n$ e $|S'| = k$. Rispondere alle seguente domande al variare di $n, k \in \mathbb{N}$

1) Quante sono le funzioni da S a S'?

2) Quante sono le funzioni iniettive da S a S'?

3) Quante sono le funzioni biunivoche da S a S'?

*4)** Quante sono le funzioni suriettive da S a S'? (Suggerimento: utilizzare il principio di inclusione/esclusione)

Esercizio 8. Si dispone di una moneta bilanciata, ossia che rende testa (T) o croce (C) con uguale probabilità.

1) Calcolare la probabilità p_2 di ottenere 2 volte T lanciando $n = 2$ volte la moneta.

2) Calcolare la probabilità p_3 di ottenere (almeno) 2 T *consecutive* lanciando $n = 3$ volte la moneta.

*3)** Calcolare la probabilità p_n di ottenere (almeno) 2 T *consecutive* lanciando n volte la moneta, per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 9.* Dato un insieme (finito) Ω, una *partizione* $\{D_i\}$ di Ω è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di Ω con le proprietà $\Omega = \bigcup_i D_i$ con $D_i \cap D_j = \emptyset$ per $i \neq j$. Sia d_n il numero di partizioni di un insieme di cardinalità n. Poniamo, per convenzione, $d_0 = 1$.

1) Dimostrare la relazione ricorsiva

$$d_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$$

2) Via induzione in n verificare quindi l'identità

$$d_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21

Probabilità 1, Canale 1 (Docente: L. Bertini)

ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 3

Esercizio 1. Carletto deve fare il compito in classe di matematica. Nel sussidiario ci sono 50 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 30 di geometria non commutativa e 10 di statistica bayesiana. Carletto non sa assolutamente nulla di tali materie, impara quindi a memoria 20 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 10 di geometria non commutativa e 5 di statistica bayesiana. Al momento del compito, Carletto svolge solo gli esercizi che ha imparato a memoria.

1) Se la maestra prepara un compito scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 4 esercizi di geometria commutativa, con quale probabilità Carletto riesce a svolgere tutti gli esercizi di geometria commutativa?

Si supponga invece che la maestra prepari il compito scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 5 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 4 esercizi di geometria non commutativa e 1 esercizio di statistica bayesiana.

2) Quanti compiti diversi può preparare la maestra? (compiti che differiscono solo per l'ordine degli esercizi non sono considerati diversi)

3) Con quale probabilità Carletto svolge tutti i 10 esercizi?

4) Con quale probabilità Carletto svolge 3 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 2 di geometria non commutativa e 1 di statistica bayesiana?

Esercizio 2. Alice (A), Barbara (B) e Carlo (C) competono tra loro in un torneo con le seguenti modalità. Nel primo incontro si sfidano A e B. Il vincitore gioca poi contro C, se vince anche questo incontro è proclamato vincitore assoluto; se invece vince C, costui gioca contro il perdente dell'incontro precedente e così di seguito. Il primo giocatore a vincere due incontri consecutivi vince il torneo. Si tenga presente che A,B,C hanno la stessa abilità nel gioco e pertanto ogni incontro è vinto da uno dei due contendenti con probabilità 1/2.

1) Calcolare la probabilità che il torneo finisca dopo n incontri, $n \geq 2$.

2) Calcolare le probabilità di vittoria per A,B e C.

3) Il torneo potrebbe non avere mai termine?

Esercizio 3. (COUPON COLLECTOR) Si consideri un album con n figurine.

1) Calcolare la probabilità di completare l'album comprando k figurine, $k \geq n$ (si supponga probabilità uniforme sulla k-pla di figurine comprate).

2) Utilizzando la subadditività della probabilità, dare una stima, senza usare la calcolatrice, di quante figurine bisogna acquistare per avere una probabilità superiore al 90% di completare un album di 100 figurine.

3) Se si acquista una figurina al giorno, calcolare la probabilità di completare l'album esattamente dopo k giorni, $k \geq n$.

Esercizio 4. Armando gioca 10 partite alla roulette puntando sul rosso 1 euro a partita. La probabilità di vincere una singola partita è 18/37

1) Calcolare la probabilità che Armando vinca per la prima volta alla quinta partita.

2) Calcolare la probabilità che armando vinca almeno 2 partite.

3) Calcolare la probabilità che alla fine delle 10 partite il capitale di Armando sia aumentato di 2 euro.

Esercizio 5. (Formula di Stirling) Lo scopo di questo esercizio è dimostrare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

svolgendo i seguenti passi.

1) Via integrazione per parti, verificare che

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt$$

2) Via cambi di variabile, verificare che

$$n! = n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^\infty e^{-n\phi(t)}\, dt, \qquad \phi(t) = t - \log(1+t).$$

Osservare che ϕ è convessa ed assume minimo per $t = 0$.

3) L'approssimazione di Stirling si ottienere ora sostituendo a ϕ il suo sviluppo quadratico intorno al minimo. Più precisamente, utilizzando $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \sqrt{2\pi}$, si verifichi che

$$n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} = n^{n+1} e^{-n} \int_{-\infty}^\infty e^{-n\frac{1}{2}t^2}\, dt.$$

A questo punto l'affermazione voluta è equivalente a (verificare!)

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\Big\{ \int_{-1}^\infty e^{-n\phi(t)}\, dt - \int_{-\infty}^\infty e^{-n\frac{1}{2}t^2}\, dt \Big\} = 0$$

4) Si consideri il contributo degli integrali in (1) per $|t| < 1/n^\alpha$. Utilizzando lo sviluppo di Taylor, verificare che se $\alpha > 3/8$ tale contributo converge effettivamente a zero.

5) Si consideri il contributo del secondo integrale in (1) per $|t| > 1/n^\alpha$. Via calcolo diretto verificare che se $\alpha < 1/2$ tale contributo converge effettivamente a zero.

6) Si consideri infine il contributo del primo integrale in (1) negli intervalli $(-1, -1/n^\alpha)$ e $(1/n^\alpha, \infty)$. Utilizzando la convessità di ϕ (ϕ è "sopra" la retta tangente) verificare che se $\alpha < 1/2$ tale contributo converge effettivamente a zero.

Esercizio 6.* Due numeri sono estratti a caso con rimpiazzo da $\{1, \dots, n\}$.

1) Calcolare la probabilità q_n che i due numeri estratti siano primi tra loro (ovvero non abbiano divisori comuni). [Sugg. Utilizzare il principio di esclusione/inclusione]

2) Indicando con $\mathcal{P}$ i numeri primi, verificare che $\lim_{n\to\infty} q_n = \prod_{p\in\mathcal{P}} \Big(1 - \frac{1}{p^2}\Big)$

3) Dimostrare l'identità $\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$

[Sugg. Utilizzare la serie geometrica ed il teorema fondamentale dell'aritmetica]

Oss. Poiché $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (la dimostrazione di questa identità non è però richiesta), si conclude che $\lim_{n\to\infty} q_n = 6/\pi^2$.

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
Probabilità 1, Canale 1 (Docente: L. Bertini)
Esercizi settimanali

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

Settimana 4

Esercizio 1. Vengono lanciati 2 dadi regolari.

1) Mostrare che l'evento "la somma dei dadi fa sette" è indipendente dal risultato del primo dado.
2) Mostrare che l'evento "la somma dei dadi fa nove" non è indipendente dal risultato del primo dado.
3) Dare una spiegazione intuitiva della diversità tra i due casi precedenti.

Esercizio 2. Siano $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ eventi. Dimostrare che $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ sono indipendenti se e solo se $\{A_i^c\}_{i=1,\dots,n}$ sono indipendenti.

Esercizio 3. Per $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,1)$ si consideri la distribuzione binomiale (numero di teste in n lanci di moneta truccata)

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, \dots, n.$$

Dimostrare che $P(k)$ è crescente per $k \le \bar{k}$ per un oppurtuno $\bar{k} = \bar{k}(n,p)$ (da trovare) e decrescente per $k > \bar{k}$.

Esercizio 4. Si dispone di una moneta truccata con parametro di truccatura p incognito che si vuole determinare con il criterio di *massima verosimiglianza*, ovvero determinando il valore $\hat{p}$ che massimizza la probabilità dell'evento osservato.

1) Si lancia la moneta n volte ottenendo testa k volte. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per p.
2) Si lancia la moneta finché si ottiene una testa, diciamo al h-esimo lancio. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per p.

Esercizio 5.

1) Siano $B, N, n \in \mathbb{N}$ con $B, N \ge n$. Dimostrare mediante un'interpretazione probabilistica la formula

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{B}{k}\binom{N}{n-k} = \binom{N+B}{n}.$$

2) Per $x \in \mathbb{R}$ e $B, N \in \mathbb{N}$ si consideri l'identità

$$(1+x)^{N+B} = (1+x)^N (1+x)^B.$$

Utilizzando lo sviluppo del binomio e il principio di identità dei polinomi dimostrare la formula del punto precedente senza alcuna interpretazione probabilistica.

3) Alice e Bob lanciano una moneta equa n volte ciascuno. Calcolare la probabilità che ottengano lo stesso numero di teste.

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ si definisce $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ e, per convenzione, $\binom{\alpha}{0} := 1$.

4) * Verificare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in (-1,1)$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$
5) * Dire se la formula del punto 1. è vera per ogni $B, N \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. (Un teorema limite per la distribuzione ipergeometrica) Per $n, b, k \in \mathbb{N}$, si consideri la *distribuzione ipergeometrica*
$$P_{n,b,k}(h) = \frac{\binom{b}{h}\binom{n}{k-h}}{\binom{b+n}{k}}, \qquad h = 0, \dots, k.$$

1) Calcolare il limite di $P_{n,b,k}$ per $b, n \to \infty$ con $b/(b+n) \to p \in (0,1)$ (k è fisso).

2) Discutere l'interpretazione del risultato, per esempio considerando un problema di estrazioni da urne.

Esercizio 7. Si considerino lanci ripetuti di una moneta truccata in modo che la probabilità di ottenere testa sia $p \in (0,1)$. Dati $a, b \geq 1$, calcolare la probabilità che la moneta renda a volte testa prima di b volte croce.

Esercizio 8. In una città con $n+1$ abitanti una persona è infetta. Costui infetta un altro abitante scelto a caso tra i possibili n, il secondo a sua volta infetta un abitante scelto a caso i possibili n (l'infezione può quindi tornare all'infetto originario), e così via.

1) Calcolare la probabilità che l'infezione si propaghi k volte senza ritornare alla fonte.

2) Calcolare la probabilità che l'infezione si propaghi k volte senza che colpisca più di una volta lo stesso abitante.

*Rispondere alle domande precedenti nel caso in cui l'infezione venga diffusa contemporaneamente a $m < n$ persone diverse scelte a caso tra le possobili n (il caso svolto prima corrisponde a $m = 1$).

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
Probabilità 1, Canale 1 (Docente: L. Bertini)
Esercizi settimanali

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

Settimana 5

Esercizio 1. È noto che i gemelli possono essere omozigoti, in questo caso sono necessariamente dello stesso sesso, oppure eterozigoti, e in questo caso sono dello stesso sesso nel 50% dei casi. Sia p la probabilità che due gemelli siano omozigoti.

1) Calcolare, in funzione di p, la probabilità che 2 gemelli siano omozigoti sapendo che sono dello stesso sesso.

2) Calcolare, in funzione di p, la probabilità che 2 gemelli siano di sesso diverso.

Esercizio 2. Un canale di comunicazione trasmette segnali binari. A causa del rumore di fondo alcune volte viene trasmesso 0, ma è ricevuto 1; altre volte viene trasmesso 1 e ricevuto 0. Si assuma che

- la probabilità che uno 0 sia ricevuto correttamente è 0.94;
- la probabilità che un 1 sia ricevuto correttamente è 0.91.

Viene spedito un singolo bit, che con probabilità 0.45 è uno 0 e con probabilità 0.55 e un 1. Calcolare:

1) la probabilità che venga ricevuto 1;

2) la probabilità che venga ricevuto 0;

3) la probabilità che sia stato trasmesso 1 se si è ricevuto 1;

4) la probabilità che sia stato trasmesso 0 se si è ricevuto 0;

5) la probabilità che si verifichi un errore di trasmissione.

Esercizio 3. Si consideri un'urna contenente una pallina rossa ed una verde. Si estrae una prima pallina e, osservatone il colore, la si reimmette nell'urna con una pallina dello stesso colore. Vengono effettuate di seguito altre 2 estrazioni, modificando di volta in volta la composizione dell'urna con la regola illustrata sopra. Sia R_i, per $i = 1, 2, 3$, l'evento "l'i-esima pallina estratta è rossa".

1) Calcolare $\mathbb{P}(R_1|R_2)$.

2) Calcolare $\mathbb{P}(R_3|R_2)$.

3) Calcolare $\mathbb{P}(R_1|R_3)$.

Esercizio 4. In un'urna ci sono tre monete: la prima è equa ed ha testa (T) su di una faccia e croce (C) sull'altra, la seconda ha C su entrambe le facce, la terza ha T su entrambe le facce.

1) Si estrae a caso una moneta dall'urna e la si lancia senza guardare di quale moneta si tratti. Calcolare la probabilità che esca T.

2) Si raccoglie ora la moneta (senza guardare che moneta sia) e la si lancia nuovamente. Calcolare la probabilità che la moneta renda ancora T.

3) La procedura descritta nel punto precedente viene ripetuta n volte e la moneta rende T ogni volta. Calcolare, in funzione di n, la probabilità che la moneta sia quella con T su entrambe le facce.

Esercizio 5. Tre sentieri collegano i bivacchi A, B e C in modo che da ciascun bivacco si possa raggiungere uno qualunque degli altri due con un sentiero diretto. A causa di frane, ciascun sentiero può essere non percorribile. Sia $p_{AB} \in (0,1)$ (rispettivamente p_{BC}, p_{AC}) la probabilità che il sentiero che collega A con B (rispettivamente B con C, A con C) sia percorribile. Si assuma che lo stato di agibilità di ciascun sentiero sia indipendente dagli altri. Vi trovate al bivacco A.

1) Calcolare la probabilità che possiate arrivare al bivacco C.

2) Un alpinista vi ha detto che non è possibile arrivare a C per via delle frane. Calcolare la probabilità che possiate comunque arrivare a B.

Supponiamo ora che tra A e B via siano 3 sentieri diretti, ciascuno percorribile con probabilità q indipendentemente dagli altri.

3) Calcolare le due probabilità precedenti (senza rifare tutti i calcoli).

Esercizio 6. (The Monty Hall problem: capre e automobili) In uno spettacolo televisivo, uno spettatore deve scegliere una porta fra tre. Una delle porte nasconde un'automobile nuova, le altre due, una vecchia capra ciascuna dette capra A e capra B. Il contenuto della porta scelta sarà il premio assegnato allo spettatore. Una volta fatta la scelta la porta non viene aperta ma il presentatore apre invece una fra le due porte non scelte che rivela una capra. Il presentatore poi offre allo spettatore la possibilità di cambiare la porta da lui inizialmente scelta con l'altra porta ancora chiusa. Sia p la probabilità (condizionata) che la porta così offerta contenga l'automobile. Verificare che:

1) $p = 2/3$ se la strategia del presentatore è quella di mostrare sempre una capra, senza preferenze tra le capre.

2) $p = 1/2$ se il presentatore apre una porta a caso.

3) $p = 1/(1 + a)$ se si vede la capra A e la strategia del presentatore è quella di mostrare sempre una capra e nel caso ci siano 2 capre mostrare la capra A con probabilità a.

Esercizio 7. Sia S un inieme di cardinalità n. Si scelgono a caso (con 'rimpiazzo') due sottoinsiemi di S. Calcolare la probabilità che il primo sottoinsieme scelto sia incluso nel secondo.

Esercizio 8.* (Problema delgli accoppiamenti via probabilità condizionata) Si consideri il problema degli accopiamenti, ovvero la scelta casuale di una permutazione di $\{1, \ldots, n\}$.

1) Sia q_n la probabilità che la permutazione scelta non abbia punti fissi. Condizionando rispetto all'immagine del punto 1 ed utilizzando la formula delle probabilità totali ricavare una formula ricorsiva per q_n in funzione di q_{n-1} e q_{n-2}.
Sugg. Se 1 finisce in i con $i \neq 1$ distinguere i casi in cui i è finito in 1 oppure no.

2) Risolvere la ricorsione e riottenere la stessa espressione ricavata via inclusione/esclusione.

3) Utilizzare lo stesso metodo per ricavare la probabilità che una permutazione scelta a caso abbia (esattamente) k punti fissi, $k = 0, \ldots, n$.

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
Probabilità 1, Canale 1 (Docente: L. Bertini)
Esercizi settimanali

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

Settimana 7

Esercizio 1. Lanciando un dado equo a 6 facce, sia X il risultato ottenuto.

1) Calcolare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore atteso di X.
3) Calcolare la varianza di X.

Rispondere alle precedenti domande nel caso in cui il dado abbia $n \in \mathbb{N}$ facce.

Esercizio 2. Lanciando due dadi equi a 6 facce, sia X il minimo tra i due risultati.

1) Calcolare la distribuzione di X.
2) Calcolare il valore atteso di X.

Rispondere alle precedenti domande nel caso in cui il dado abbia $n \in \mathbb{N}$ facce.

Esercizio 3. Si consideri un esame a risposta multipla organizzato al modo seguente. In totale ci sono 10 domande e per ogni domanda ci sono 4 possibili risposte, di cui una sola è corretta. L'algoritmo di valutazione è il seguente: ogni risposta giusta vale 3 e ogni risposta sbagliata (o non risposta) vale -1. Alice risponde a caso a tutte le 10 domande.

1) Calcolare la probabilità che Alice ottenga la sufficenza (18/30).
2) Calcolare il valore di attesa del voto di Alice.
3) Calcolare la varianza del voto di Alice.

Esercizio 4. Una scatola contiene 10 transistor di cui 3 sono rotti. Si esamina un transistor alla volta (senza rimpiazzo) finché non se ne trova uno rotto. Calcolare il valore di attesa del numero di transistor esaminati.

Esercizio 5. (Indipendenza di variabili aleatorie) Siano X e Y due variabili aleatorie.

1) Dimostrare che se X è una variabile aleatoria certa, ovvero $X = c$ per un qualche $c \in \mathbb{R}$, allora X e Y sono indipendenti.
2) Dimostrare che nel caso in cui X e Y sono binarie, ovvero $\big|\mathrm{Im}(X)\big| = \big|\mathrm{Im}(Y)\big| = 2$, le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti se e solo se $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.
3) Costruire un esempio in cui $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ ma X e Y non sono indipendenti.

Esercizio 6. (Dimostrazione alternativa del principio di inclusione esclusione)

1) Siano A e B eventi. Verificare che $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$ e che $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
2) Siano $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Convincersi della validità dell'identità (binomiale):

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}} \prod_{i \in I} a_i \prod_{j \in I^c} b_j.$$

3) Utilizzare i due punti precedenti e le proprietà del valore atteso per dimostrare il principio di inclusione esclusione.

Esercizio 7.* (Variabile aleatoria ipergeometrica) Si consideri un'urna con b palline bianche ed n palline nere. Si effettuano k estrazioni senza rimpiazzo ($k \leq b+n$). Sia X_i, $i = 1, \ldots, k$ la variabile aleatorie che vale 1 se l'i-ma pallina estratta è bianca e 0 se nera. Sia inoltre X il numero totale di palline bianche estratte.

1) Trovare la distribuzione di X.

2) Calcolare il valore di attesa di X.
(È richiesto sia il calcolo diretto a partire dalla distribuzione di X sia quello a partire dal valore di attesa di X_i.)

3) Calcolare la covarianza tra X_i e X_j, $i, j = 1, \ldots, k$.

4) Calcolare la varianza di X.
(È richiesto sia il calcolo diretto a partire dalla distribuzione di X sia quello svolto scrivendo $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ ed usando la risposta alla domanda precedente.)

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 8

Esercizio 1. Un dado equo viene lanciato finché non esce 5 o 6. Sia T il numero totale di lanci effettuati e X il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

1) Calcolare $\mathbb{P}(T = 3, X = 5)$.

2) Calcolare la distribuzione di T.

3) Calcolare la distribuzione di X.

4) Dire, giustificando la risposta, se sono variabili aleatorie T e X sono indipendenti.

Esercizio 2. Quante volte bisogna lanciare – in media – un dado equo per vedere apparire tutte le faccie?
SUGG. Utilizzando variabili aleatorie geometriche si trova la soluzione senza necessità di calcoli.

Esercizio 3. In uno schema di Bernoulli con probabilità di testa $p \in (0, 1)$ sia X la variabile aleatoria che conta il numero di risultati uguali al primo; ovvero $X = 1$ se il primo lancio è testa e il secondo croce oppure il primo croce ed il secondo testa, $X = 2$ se due teste e poi una croce oppure due croci e poi una testa,...

1) Trovare la distribuzione di X.

2) Calcolare il valore di attesa di X.

3) Calcolare la varianza di X.

Esercizio 4. Siano X_i, $i = 1, 2, 3$ variabili aleatorie indipendenti uniformi in $\{1, \dots, n\}$.

1) Calcolare la distribuzione di $X_1 + X_2$.

2) Calcolare la distribuzione di $X_1 + X_2 + X_3$.

Esercizio 5. Una moneta con probabilità di testa pari a $p \in [0, 1]$ viene lanciata un numero di volte aleatorio (indipendente dai risultati dei lanci della moneta) con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Trovare le dstribuzioni del numero totale di teste e croci otteneute e dimostrare che queste due variabili aleatorie sono indipendenti.

Esercizio 6. Si consideri la disposizione casuale di n palline in k scatole: ogni pallina sceglie, indipendentemente dalle altre, una scatola con probabilità uniforme. Sia $X_i = 0, \dots, n$ il numero di palline nella scatola i, con $i = 1, \dots, k$.

1) Calcolare la distribuzione di X_1.

2) Calcolare la covarianza tra X_1 e X_2.

Si consideri il limite in cui $k, n \to \infty$ con $\frac{n}{k} \to \lambda \in (0, +\infty)$

3) Calcolare la distribuzione limite di X_1.

4) Dimostrare che in questo limite le variabili aleatorie X_1 e X_2 diventano indipendenti.

Esercizio 7. Siano $Z_1, \dots, Z_k$ variabili aleatorie di Poisson di parametro $\lambda \in (0, \infty)$ indipendenti.

1) Calcolare la distribuzione di Z_1 condizionata all'evento $Z_1 + \cdots + Z_k = n$, $n \in \mathbb{N}$, ovvero
$$\mu_1(z|n) := \mathbb{P}\big(Z_1 = z \big| Z_1 + \cdots + Z_k = n\big).$$
2) Calcolare la distribuzione di Z_1 e Z_2 condizionata all'evento $Z_1 + \cdots + Z_k = n$, $n \in \mathbb{N}$, ovvero
$$\mu_{12}(z_1, z_2|n) := \mathbb{P}\big(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2 \big| Z_1 + \cdots + Z_k = n\big).$$
3) Condizionatamente all'evento $Z_1 + \cdots + Z_k = n$, $n \in \mathbb{N}$, calcolare la covarianza tra Z_1 e Z_2, ovvero:
$$\mathrm{cov}(Z_1, Z_2|n) := \sum_{z_1, z_2} z_1 z_2 \mu_{12}(z_1, z_2|n) - \sum_{z_1, z_2} z_1 \mu_{12}(z_1, z_2|n) \sum_{z_1, z_2} z_2 \mu_{12}(z_1, z_2|n).$$
4) Confrontare i risultati con quelli ottenuti nell'esercizio precedente.

Esercizio 8.* (Ancora sul problema dell'album di figurine) Si consideri un album con n figurine per completare il quale si acquista una figurina al giorno (si supponga probabilità uniforme sulla distribuzione della figurina comprata ciascun giorno ed indipendenza tra figurine comprate in giorni diversi).

1) Dimostrare che il valore di atteso del numero di giorni necessari per completare l'album è dato da
$$K_n = n\Big[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\Big].$$
2) Dimostrare l'asintotica
$$K_n = n\Big[\log n + \varkappa + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]$$
per un opportuna costante $\varkappa \in \mathbb{R}$ (è richiesto trovare una formula per $\varkappa$, ma non il suo calcolo esplicito).

3) Trovare la varianza del numero di giorni necessari per completare l'album.

Sugg. Ragionare in termini di variabili aleatorie geometriche.

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
Probabilità 1, Canale 1 (Docenti: L. Bertini, V. Silvestri)
ESERCIZI SETTIMANALI

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

SETTIMANA 9

Esercizio 1. Siano T_1 e T_2 due variabile aleatorie indipendenti e geometriche rispettivamente di parametri p_1 e p_2.

1) Calcolare $\mathbb{P}(T_1 = T_2)$.

2) Calcolare $\mathbb{P}(T_1 \geq 2T_2)$.

3) Determinare la distribuzione della variabile aleatoria $\min\{T_1, T_2\}$.

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{Z}_+$, dimostrare che

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Esercizio 3. Da un gruppo di 7 batterie, di cui 3 nuove, 2 usate ma funzionanti e 2 difettose, ne vengono scelte 3 a caso. Siano X e Y rispettivamente il numero di batterie nuove e usate (ma funzionanti) tra quelle scelte.

1) Determinare la distribuzione congiunta di (X, Y) e le distribuzioni marginali di X e di Y.

2) Calcolare $\text{cov}(X, Y)$. Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

3) Le tre batterie scelte sono montate su di un apparecchio che funziona se nessuna di esse è difettosa. Determinare la probabilità che l'apparecchio funzioni.

Esercizio 4. (COSTRUZIONE INTERVALLI DI CONFIDENZA) Si consideri una moneta truccata con parametro di truccatura p incognito. Al fine di determinare p, si lancia la moneta n volte e si stima p con S_n/n, ove S_n è il numero di teste negli n lanci effettuati. Utilizzando la diseguaglianza di Chebyshev, dato $\delta > 0$ determinare quanto grande deve essere n affiché la probabilità che $|S_n/n - p| < \delta$ sia almeno il 95%.

Esercizio 5. I componenti elettronici prodotti in una fabbrica sono difettosi, l'uno indipendentemente dall'altro, con probabilità p e funzionanti con probabilità $1 - p$, $p \in (0, 1)$. Vengono sottoposti ad un controllo di qualità con la seguente modalità: ogni componente, l'uno indipendentemente dall'altro, viene ispezionato con probabilità α e non ispezionato con probabilità $1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Un componente trovato difettoso viene scartato, mentre gli altri vengono messi in commercio. Si supponga di avere n componenti prodotti dalla fabbrica.

1) Calcolare la distribuzione del numero di componenti che vengono scartati dopo il controllo di qualità.

2) Sapendo che il numero di componenti scartati dopo il controllo di qualità è pari a k, $k = 0, 1, \ldots, n$, calcolare la distribuzione dei componenti difettosi tra gli $n - k$ messi in commercio.

3) Siano X il numero di componenti messi in commercio e Z il numero di componenti difettosi messi in commercio. Calcolare $\mathbb{E}(Z/X|X)$ e $\mathbb{E}(Z/X)$.

Esercizio 6. Siano X e Y variabili aleatorie di Poisson indipendenti rispettivamente di parametro λ e μ. Calcolare $\mathbb{E}(X|X+Y)$ e $\mathbb{E}(X+Y|X)$.

Esercizio 7. (Convergenza in probabilità di variabili aleatorie) Sia X_n una successione di variabili aleatorie che converge in probabilità a $m \in \mathbb{R}$, ovvero per ogni $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|X_n - m| \geq \delta\big) = 0.$$

1) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che la successione di variabili aleatorie $Y_n := f(X_n)$ converge in probabilità a $f(m)$.

2) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Dimostrare che la successione (numerica) $\mathbb{E}\big(f(X_n)\big)$ converge a $f(m)$.

3) Costruire un esempio in cui X_n converge in probabilità a 0, ma $\mathbb{E}(X_n)$ non converge a 0.

Dimostrare infine che X_n converge in probabilità a m se e solo se $\mathbb{E}\big(f(X_n)\big)$ converge a $f(m)$ per ogni funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e limitata.

Esercizio 8.* (Variante teorema di Poisson) Sia X_n una successione di variabili aleatorie a valori in $\mathbb{Z}_+$ e X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{Z}_+$. Per definizione (provvisoria), X_n converge in legge a X se e solo se per ogni $k \in \mathbb{Z}_+$ si ha $\lim_n \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.

1) Sia X_n una successione di variabili aleatorie che converge in legge a X ed Y_n una successione di variabili aleatorie (sempre a valori in $\mathbb{Z}_+$) che converge a zero in probabilità, ovvero tale che $\lim_n \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1$. Dimostrare che la successione di variabili aleatorie $X_n + Y_n$ converge in legge a X.

2) Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite a valori in $\mathbb{Z}_+$ soddisfacenti $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_n - q_n$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_n$, $\mathbb{P}(X_i \geq 2) = q_n$ con $p_n, q_n > 0$ tali che $np_n \to \lambda$ e $nq_n \to 0$. Posto $Z_n := \sum_{i=1}^n X_i$, dimostrare che Z_n converge in legge ad una variabile di Poisson di parametro λ.

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
Probabilità 1, Canale 1 (Docenti: L. Bertini, V. Silvestri)
Esercizi settimanali

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

Settimana 10

Esercizio 1. A e B giocano al seguente gioco: A scrive 1 o 2 su un foglio e B deve indovinare il numero scritto da A Se A ha scritto $i \in \{1, 2\}$ e B indovina allora A paga i euro a B. Se invece B non indovina allora B paga 0.75 euro ad A.

Si supponga che B adotti una strategia casuale dichiarando 1 con probabilità p e 2 con probabilità $1 - p$.

1) Supponendo che A abbia scritto 1 determinare il guadagno medio di B
2) Supponendo che A abbia scritto 2 determinare il guadagno medio di B
3) determinare il valore di p che massimizza il minimo tra i 2 guadagni medi precedenti.

Si supponga che A adotti una strategia casuale scrivendo 1 con probabilità q e 2 con probabilità $1 - q$.

4) Supponendo che B dichiari 1 determinare la perdita media di A.
5) Supponendo che B dichiari 2 determinare la perdita media di A.
6) determinare il valore di q che minimizza la massima tra le 2 perdite medie precedenti.

Confrontare le risposte ai punti 3 e 6.

Esercizio 2. Siano X_i, $i = 1, 2$ variabili aleatorie uniformi in $[0, 1]$ indipendenti.

1) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $X_1 + X_2$.
2) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $\max\{X_1, X_2\}$.
3) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $\min\{X_1, X_2\}$.

Esercizio 3. Siano U una variabile aleatoria uniforme in $(0, 1)$ e V una variabile aleatoria indipendente da U uniforme in $(-1, 1)$.

1) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di V^2.
2) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $\log(1/U)$.
3) Calcolare $\mathbb{P}(U \leq V)$.

Esercizio 4. Siano T_i, $i = 1, 2$ variabili aleatorie esponenziali di parametro $\lambda > 0$ indipendenti.

1) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $T_1 + T_2$.
2) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $\max\{T_1, T_2\}$.
3) Calcolare la distribuzione (ovvero la densità di probabilità) di $\min\{T_1, T_2\}$.

Esercizio 5. Ogni giorno Vanya beve un volume d'acqua aleatorio, ed assumiamo che il volume X_k bevuto al giorno k sia una variabile aleatoria positiva, di attesa finita, ma non limitata (ossia $\mathbb{P}(X_k > v) > 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}$). Assumiamo inoltre che le variabili aleatorie $X_1, X_2, \ldots$ siano indipendenti ed abbiamo tutte la stessa legge.

Per $v \geq 0$, definiamo $T_v := \inf\{k \in \mathbb{N} : X_k > v\}$. Ossia T_v è il numero di giorni trascorsi prima che Vanya beva (in un giorno) almeno un volume v di acqua.

1) Determinare la legge della variabile aleatoria T_v, a partire dalla distribuzione di X.

2) Calcolare il valore di attesa di T_v e mostrare che $\lim_{v\to+\infty} \mathbb{E}T_v = +\infty$.

3) Mostrare che $\lim_{v\to+\infty} \mathbb{P}(T_v > \mathbb{E}T_v) = e^{-1}$.

Esercizio 6. Si consideri il circuito in figura, dove i tempi di rottura dei componenti 1, 2, 3 sono

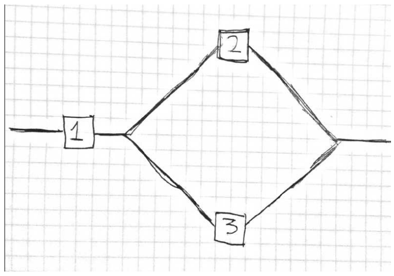

FIGURA 1. Il circuito si considera funzionante se il componente 1 funziona ed almeno uno tra i componenti 2 e 3 funziona.

variabili aleatorie esponenziali indipendenti rispettivamente di parametri λ_1, λ_2, λ_3.

1) Determinare la legge del tempo di rottura del circuito.

2) Calcolare esplicitamente il valore di attesa del tempo di rottura del circuito.

3) Sapendo che al tempo T il circuito funziona, calcolare la probabilità che uno tra i componenti 2 e 3 si sia rotto.

Esercizio 7. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda/\sqrt{n}$, $\lambda > 0$. Sia inoltre $Y_n := \max_{i=1,\ldots,n} X_i$. Dimostrare che Y_n converge in legge ad una variabile aleatoria Y ed identificare la distribuzione di Y.
SUGG. Scrivere la probabilità dell'evento $\{Y_n \le \ell\}$ per $\ell = 0, 1, 2$ e passare al limite per $n \to \infty$.

Esercizio 8.* (DISTANZA IN VARIAZIONE TOTALE) Sia $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ l'insieme delle probabilità su $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \ldots\}$ (rispetto alla σ-algebra di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{Z}_+$). Sia $d_{\mathrm{TV}} \colon \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) \to \mathbb{R}_+$ la funzione (*distanza in variazione totale*) definita da

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) := \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \big|\mu(i) - \nu(i)\big|$$

ove $\mu(i) = \mu(\{i\})$, $i \in \mathbb{Z}_+$.

1) Verificare che d_{TV} è una distanza.

2) Dimostrare che

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) = \sup_{A \subset \mathbb{Z}_+} \big|\mu(A) - \nu(A)\big|.$$

3) Dimostrare che

$$2\, d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) = \sup_{\substack{f \colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R} \\ |f| \le 1}} \big|\mathbb{E}_\mu(f) - \mathbb{E}_\nu(f)\big|$$

ove $\mathbb{E}_\mu(f)$ è il valore di attesa di f rispetto a μ.

4) Dimostrare che $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ con la distanza d_{TV} è uno spazio metrico completo.

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2020-21
Probabilità 1, Canale 1 (Docenti: L. Bertini, V. Silvestri)
Esercizi settimanali

Gli esercizi e le domande contrassegnate con * sono impegnativi. Si consiglia quindi di affrontarli dopo aver risolto gli altri.

Settimana 11

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria *continua o discreta* positiva ($X \geq 0$) con funzione di distribuzione $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$. Dimostrare la formula

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} [1 - F(x)]\, dx$$

Esercizio 2. Le sfere di acciaio prodotte dalla ACME devono avere un diametro di 5 mm. Sono tuttavia accettabili sfere di diametro compreso tra 4 mm e 6 mm. Si assuma che i diametri delle sfere prodotte siano variabili aleatorie gaussiane indipendenti di media 5 mm e varianza $0.25\,\mathrm{mm}^2$.

1) Quale percentuale dei pezzi prodotti non rispetta i limiti di tolleranza?

2) Potendo ricalibrare di produzione, modificando la varianza delle sfere, si determini il valore massimo della varianza per cui la percentuale di pezzi che non rispettano i limiti di tolleranza è inferiore all'1%.

Esercizio 3. Per trasmettere un bit da una sorgente A a una ricevente B tramite una coppia di fili elettrici, si applica una differenza di potenziale di $+2\,\mathrm{V}$ per il valore 1 e di $-2\,\mathrm{V}$ per il valore 0. A causa di disturbi elettromagnetici, se A applica $\mu = \pm 2\,\mathrm{V}$, B legge $X = \mu + Z$, dove Z rappresenta il rumore, descritto da una variabile aleatoria gaussiana di media 0 e varianza $1\,\mathrm{V}^2$. Dalla lettura di X, B decodifica il messaggio con la seguente regola: se $X \geq 0.5\,\mathrm{V}$ si decodifica 1, mentre se $X < 0.5\,\mathrm{V}$ si decodifica 0.

1) Se A invia 0, calcolare la probabilità che B decodifichi 1.

2) Se A invia 1, calcolare la probabilità che B decodifichi 0.

Si supponga ora che A invii 0 o 1 con la stessa probabilità.

3) Calcolare la probabilità che B decodifichi 1.

4) Se B ha decodificato 1 calcolare la probabilità che la decodifica corrisponda al messaggio inviato.

Esercizio 4. Siano X, Y variabili aleatorie gaussiane standard (valore di attesa 0 e varianza 1) indipendenti.

1) Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria X^2.

2) Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria $X^2 + Y^2$.

Esercizio 5. Sia Z una variabile aleatoria gaussiana standard.

1) Per $k \in \mathbb{N}$ calcolare $\mathbb{E}(Z^k)$.

Siano ora $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite tali che $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ e $\mathbb{E}|X_i|^k < \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Si ponga infine $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$.

2) Per $k \in \mathbb{N}$ calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n^k)$ e confrontare con il risultato del punto precedente.

Esercizio 6. Un percorso escursionistico prevede la scelta di itinerari di difficoltà crescente. In particolare, per completare l'itinerario k è necessario superare k ostacoli, $k = 1, 2, \dots$. Supponendo che il tempo necessario per superare un ostacolo sia descritto da una variabile esponenziale con valore di attesa pari a un'ora e che ostacoli diversi siano descritti da variabili aleatorie indipendenti, rispondere alle domande seguenti.

1) Si consideri il caso in cui Alfonso sceglie il primo itinerario (quello con un solo ostacolo). Determinare la probabilità con cui completa il percorso in meno di un ora.

2) Si consideri il caso in cui Alfonso sceglie il k-esimo itinerario (quello con k ostacoli) con probabilità pari a $(1-p)^{k-1}p$. $k = 1, 2, \dots$, con $p \in (0, 1)$. Determinare il valore di attesa del tempo in cui completa il percorso.

3) Si consideri il caso in cui Alfonso sceglie il k-esimo itinerario (quello con k ostacoli) con probabilità pari a $(1-p)^{k-1}p$. $k = 1, 2, \dots$, con $p \in (0, 1)$. Determinare la distribuzione del tempo in cui completa il percorso.

4) Vi sono 1000 escursionisti che scelgono il primo itinerario. Utilizzando l'approssimazione gaussiana, determinare la probabilità che almeno 600 escursionisti completino il percorso in meno di un ora.

Esercizio 7. Durante il regno di Mongke Khan, la posta viaggiava lungo la strada dello Yam. A distanze regolari i postini potevano utilizzare delle stazioni per cambiare i cavalli e percorrere migliaia di chilometri con facilità. Supponiamo che un messo debba compiere un lungo viaggio passando per $n = 400$ stazioni di servizio (oltre a quella di partenza) per portare a destinazione un messaggio di Mongke Khan. Sia T_i il tempo impiegato a coprire il percorso tra la $i-1$-esima e la i-esima stazione. Assumiamo che le $(T_i)_{i=1}^{400}$ siano delle variabili aleatorie indipendenti, identicamente distribuite e tali che

$$\mathbb{P}(T_i \geq t) = (1 + \lambda t)\, \exp(-\lambda t) \qquad \forall t \geq 0,\, i = 1, \dots, 400$$

per un'opportuna costante $\lambda > 0$.

1) Tale equazione identifica la legge di T_i?

2) Calcolare la densità di probabilità di T_i.

3) Calcolare il valore di attesa e la varianza di T_i.

Prima di partire, il messo deve stimare il tempo di percorrenza $\sum_{i=1}^{400} T_i$ del suo viaggio. Egli deve comunicare al Mongke Khan un tempo stimato τ, tale che la probabilità che egli impieghi più di τ ad arrivare a destinazione sia minore del 5%.

4) Supponendo che il messo disponesse delle tavole dell'integrale gaussiano[1], ed effettuando la dovuta approssimazione, determinare la migliore scelta di τ (in funzione di λ).

Esercizio 8.* (Convergenza della binomiale alla poissoniana con stima dell'errore)

1) Siano X, Y due variabili aleatorie sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in $\mathbb{Z}_+$. Siano inoltre $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ le distribuzioni di X, Y. Dimostrare la diseguaglianza

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) \leq \mathbb{P}(X \neq Y).$$

2) Sia X una variabile aleatoria di Bernoulli di parametro $p \in [0,1]$ e Y una variabile aleatoria di Poisson anch'essa di parametro p. Realizzare X e Y sullo stesso spazio di probabilità in modo che

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \leq p^2.$$

3) Dati $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ed $n \in \mathbb{N}$ con $\lambda/n \leq 1$ siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili di Bernoulli (tra loro indipendenti) di parametro λ/n e $Y_1, \ldots, Y_n$ variabili di Poisson (tra loro indipendenti) di parametro λ/n. Realizzare queste variabili aleatorie sullo stesso spazio di probabilità in modo che

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i \neq \sum_{i=1}^{n} Y_i\Big) \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

4) Dati $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ed $n \in \mathbb{N}$ con $\lambda/n \leq 1$ sia $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ la distribuzione bionomiale di parametri n e λ/n e μ la distribuzione di Poisson di parametro λ. Dimostrare che

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu_n, \mu) \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

[1] Le tavole dell'integrale gaussiano furono tra le prime tavole numeriche di funzioni speciali ad essere compilate. Comunque oltre cinque secoli dopo il Mongke Khan.