

Calcolo delle Probabilità 1
Esonero del 1-6-2007
M. Isopi - M. Piccioni

Esercizio 1.

Siano X_1, \dots, X_{100} variabili aleatorie indipendenti, tutte con la seguente distribuzione di probabilità

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_j = 0\} &= 0.45 - p & \mathbf{P}\{X_j = 1\} &= 0.25 \\ \mathbf{P}\{X_j = 2\} &= 0.3 & \mathbf{P}\{X_j = 3\} &= p \end{aligned}$$

dove $0 < p < 0.45$ è un parametro. Sia

$$Y = \sum_{j=1}^{100} X_j$$

- 1a Trovare il valore di p per cui risulta $\mathbf{E}(Y) = 100$.
- 1b In corrispondenza al valore di p trovato nel precedente punto, calcolare la **var** (Y).
- 1c Ancora in corrispondenza allo stesso valore di p , trovare una minorazione per la probabilità $P\{86 \leq Y \leq 114\}$.

Esercizio 2.

Sia $\{X_n\}$ la catena di Markov che modella il seguente meccanismo. In un buffer possono stare al massimo tre programmi. Ciascun programma nel buffer può essere terminato in una unità di tempo con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri programmi e da quanto accaduto in precedenza. Inoltre, alla fine di ogni unità di tempo, entra di sicuro nel buffer esattamente un altro programma, purchè il buffer non sia al massimo. La catena X_n rappresenta il numero di programmi nel buffer dopo quest'ultima operazione. Si assuma $X_0 = 1$.

- 2a Disegnare il grafo della catena e calcolare la matrice delle probabilità di transizione.
- 2b Calcolare in modo approssimato la distribuzione di X_{1000} , dandone adeguata motivazione.
- 2c Calcolare, sempre approssimativamente, la probabilità condizionata $\mathbf{P}(X_{998} = 3 | X_{1000} = 1)$.

Esercizio 3.

Un'apparecchiatura è difettosa. Premendo un bottone:

- con probabilità $\frac{2}{5}$ funziona correttamente e impiega 5 minuti a portare a termine la propria funzione
- con probabilità $\frac{3}{5}$ si blocca: se questo avviene, allora
 - a** con probabilità $\frac{1}{2}$ si blocca per 1 minuto,
 - b** con probabilità $\frac{1}{2}$ si blocca per 3 minuti,

e premendo di nuovo il bottone si può ritentare di farla funzionare.

Sia T il tempo trascorso sino a quando la macchina porta a termine la propria funzione, e sia N il numero di volte che è necessario premere il pulsante.

3a calcolare $\mathbf{E}(N)$.

3b calcolare $\mathbf{E}(T|N)$.

3c calcolare $\mathbf{cov}(T, N)$.