Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

ESONERO DEL 10.06.2011, Canale A-H (L. Bertini)

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.

Esercizio 1. Un dado equo viene lanciato finché non esce 5 o 6. Sia T il numero totale di lanci effettuati e X il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

i) Calcolare $\mathbb{P}(T = 3, X = 5)$.

ii) Calcolare la distribuzione di T.

iii) Calcolare la distribuzione di X.

iv) Calcolare la distribuzione congiunta di T e X e dire se sono variabili aleatorie indipendenti.

Esercizio 2. Una moneta truccata con probabilità di testa data da $p \in (0, 1)$ viene lanciata n volte, $n \geq 2$. Sia Y_n il numero delle coppie di teste consecutive, ad esempio se $n = 10$ e i risultati sono $CTTTCCTTCT$ allora Y_n vale 3.

i) Trovare la distribuzione di Y_3 e calcolare il suo valore di attesa.

ii) Per $i = 1, \dots, n - 1$, calcolare la probabilità che testa esca sia all'i-mo che all'$i + 1$-mo lancio.

iii) Calcolare il valore di attesa di Y_n.

iv) Calcolare la varianza di Y_n.

v) Utilizzando la diseguaglianza di Chebyshev, trovare una limitazione inferiore per $\mathbb{P}\Big(\big|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)\big| < \frac{n}{10}\Big)$ e, nel caso $p = 1/2$, determinare un valore di n per cui

$$\mathbb{P}\Big(\big|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)\big| < \frac{n}{10}\Big) > \frac{9}{10}$$

Esercizio 3. Si consideri il modello probabilistico relativo alla disposizione di n palline distinguibili in r scatole (probabilità uniforme sui corrispondenti r^n eventi elementari). Sia X_i il numero di palline nella scatola i, con $i = 1, \dots, r$.

i) Trovare la distribuzione congiunta di X_1 e X_2.

Si consideri ora il limite $n \to \infty$, $r \to \infty$ con $n/r \to \rho \in (0, +\infty)$

ii) Trovare la distribuzione limite di X_1.

iii) Dimostrare che X_1 e X_2 sono asintoticamente indipendenti, ovvero

$$\lim_{\substack{n,r\to\infty \\ n/r\to\rho}} \Big[\mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = h) - \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = h)\Big] = 0, \qquad k, h \in \mathbb{Z}_+$$