8.6.01

II ESONERO CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (MODULO UNICO)

(Prof. L. Bertini, G. Nappo, F. Spizzichino)

Corso di Laurea in Matematica

A. Siano X e Y due variabili aleatorie discrete con distribuzione congiunta data da

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0,Y=1) &= \tfrac{1}{10} \\
\mathbb{P}(X=0,Y=2) &= \tfrac{1}{10} \\
\mathbb{P}(X=0,Y=3) &= \tfrac{1}{5} \\
\mathbb{P}(X=1,Y=1) &= \tfrac{1}{5} \\
\mathbb{P}(X=1,Y=2) &= 0 \\
\mathbb{P}(X=1,Y=3) &= \tfrac{2}{5}
\end{aligned}$$

1. Trovare le distribuzioni marginali di X e Y, ovvero $\mathbb{P}(X=x)$ per $x=0,1$ e $\mathbb{P}(Y=y)$ per $y=1,2,3$
2. Calcolare i valori di attesa di X e Y e la covarianza tra X e Y: $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ e $\mathrm{cov}(X,Y)$.
3. Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?
4. Trovare la distribuzione di probabilità di $Z=X+Y$

B. Si effettuano 10 lanci indipendenti di un dado equo. Tre giocatori A, B, C scommettono sul risultato: A vince se esce 1,2 o 3; B se esce 4 o 5 e C se esce 6. Siano inoltre X_A, X_B e X_C il numero di vittorie di, rispettivamente, A, B e C.

1. Trovare la distribuzione congiunta di X_A, X_B, X_C; ovvero $\mathbb{P}(X_A=k_a, X_B=k_b, X_C=k_c)$ con $k_a, k_b, k_c \in \{0,1,\ldots,10\}$.
2. Calcolare la distribuzione marginale di X_A, ovvero $\mathbb{P}(X_A=k_a)$ con $k_a \in \{0,1,\ldots,10\}$.
3. Calcolare il valore di attesa e la varianza di X_A: $\mathbb{E}(X_A)$, $\mathrm{var}(X_A)$.
4. Si supponga ora che il dado venga lanciato n volte. Utilizzando la diseguaglianza di Chebyshev, determinare n in modo che

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10} \le \frac{X_A}{n} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right) \ge \frac{1}{100}$$

C. [**FACOLTATIVO**] Si effettuano n lanci indipendenti di una moneta non equa. Indicando con $\sigma_i \in \{0,1\}$ il risultato del lancio i–simo si ha $\mathbb{P}(\sigma_i = 1) = p$, $\mathbb{P}(\sigma_i = 0) = q$ con $p + q = 1$, $p, q \in (0,1)$. Sia inoltre $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ e sia $T^{(n)}$ la variabile aleatoria data da

$$T^{(n)}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \sigma_2 \neq \sigma_1 \\ 2 & \text{se} \quad \sigma_2 = \sigma_1, \ \sigma_3 \neq \sigma_2 \\ \cdots & \cdots \\ k & \text{se} \quad \sigma_k = \sigma_{k-1} = \cdots = \sigma_1, \ \sigma_{k+1} \neq \sigma_k \\ \cdots & \cdots \\ n-1 & \text{se} \quad \sigma_{n-1} = \sigma_{n-1} = \cdots = \sigma_1, \ \sigma_n \neq \sigma_{n-1} \\ -1 & \text{se} \quad \sigma_n = \sigma_{n-1} = \cdots = \sigma_1, \end{cases}$$

Si osservi che $T^{(n)} = k$ con $k = 1, \dots, n-1$ se vi sono stati k risultati consecutivi identici al primo.

1. Calcolare la probabilità che $T^{(n)}$ sia uguale a 1. Calcolare la probabilità che $T^{(n)}$ sia uguale a 2.

2. Trovare la distribuzione di probabilità di $T^{(n)}$

3. Dimostrare che

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(T^{(n)} = k\right) &= p\, q^k + q\, p^k \quad k = 1, 2, \dots \\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(T^{(n)} = -1\right) &= 0 \end{aligned}$$