

Esercizio 1. D_1 è un dado omogeneo a sei facce, mentre D_2 è un dado, anch'esso a sei facce, ma calibrato in modo tale che la probabilità di ottenere ciascuno dei punteggi $1, 2, 3$ è uguale a θ mentre probabilità di ottenere ciascuno dei punteggi $4, 5, 6$ è uguale a 2θ .

- i)* Quanto deve valere θ ?
- ii)* Si lancia D_1 due volte di seguito. Calcolare la probabilità di ottenere (nell'ordine) i punteggi 2 e 4 . Ripetere il calcolo sostituendo il dado D_1 con D_2 .

Supponiamo che, in un gioco da tavolo fra Emilio e Franca, D_1 e D_2 vengano distribuiti a caso fra i due giocatori.

- iii)* Calcolare la probabilità che Emilio ottenga il punteggio 2 al primo lancio.
- iv)* Calcolare la probabilità condizionata che ad Emilio sia toccato D_2 , dato che ha ottenuto il punteggio 2 al primo lancio.
- v)* Sapendo che Emilio ha ottenuto il punteggio 2 al primo lancio, calcolare la probabilità che Emilio ottenga 4 al secondo lancio.

Esercizio 2. Carletto deve fare il compito in classe di matematica. Nel sussidiario ci sono 50 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 30 di geometria non commutativa e 10 di statistica bayesiana. Carletto non sa assolutamente nulla di tali materie, impara quindi a memoria 20 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 10 di geometria non commutativa e 5 di statistica bayesiana. Al momento del compito, Carletto svolge solo gli esercizi che ha imparato a memoria.

- i)* Se la maestra prepara un compito scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 4 esercizi di geometria commutativa, con quale probabilità Carletto riesce a svolgere tutti gli esercizi di geometria commutativa?

Si supponga invece che la maestra prepari il compito scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 5 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 4 esercizi di geometria non commutativa e 1 esercizio di statistica bayesiana.

- ii)* Quanti compiti diversi può preparare la maestra? (N.B. compiti che differiscono solo per l'ordine degli esercizi NON sono considerati diversi)
- iii)* Con quale probabilità Carletto svolge tutti i 10 esercizi?
- iv)* Con quale probabilità Carletto svolge 3 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 2 di geometria non commutativa e 1 di statistica bayesiana?

Esercizio 3. Pierino ha l'indomani il compito in classe di matematica. È noto che il compito consiste di 10 esercizi, ogni esercizio svolto correttamente vale un punto, mentre un esercizio sbagliato, anche in parte, vale zero punti. Pierino non è molto bravo in matematica ed ha probabilità del 20% di svolgere correttamente, l'uno indipendentemente dall'altro, ogni esercizio.

- i)* Calcolare la probabilità che Pierino prenda almeno la sufficienza, ossia svolga correttamente almeno sei esercizi.

Guidobaldo, il compagno di banco di Pierino, è il migliore della classe ed ha probabilità del 80% di svolgere correttamente, l'uno indipendentemente dall'altro, ogni esercizio. Pierino pensa allora di copiare i primi nove esercizi da Guidobaldo e svolgere da solo l'ultimo esercizio.

- ii)* Calcolare la probabilità che Pierino svolga correttamente, seguendo la strategia precedente, almeno otto esercizi.

Se Pierino prende otto o più la maestra si insospettisce e decide che Pierino ha copiato. Pierino considera pertanto la seguente strategia. Per ogni esercizio, uno indipendentemente dall'altro, Pierino copia da Guidobaldo con probabilità $p \in [0, 1]$, mentre lo fa da solo con probabilità $1 - p$.

- iii)* Calcolare, in funzione del parametro p , la probabilità $q(p)$ che Pierino svolga correttamente, seguendo la strategia precedente, l'esercizio numero 1.
- iv)* Calcolare la probabilità che Pierino svolga correttamente, seguendo la strategia precedente, sei o sette esercizi.
- v)* (**FACOLTATIVO**) Sapendo che Pierino ha seguito la strategia precedente e che ha svolto correttamente sei esercizi, calcolare la probabilità che abbia copiato da Guidobaldo tutti i dieci esercizi.