Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

Esonero del 13.6.2014, Canale A-H (L. Bertini)

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.

Esercizio 1. Dei componenti prodotti in una fabbrica sono difettosi, l'uno indipendentemente dall'altro, con probabilità p e funzionanti con probabilità $1-p$, $p \in (0,1)$. Vengono sottoposti ad un controllo di qualità con la seguente modalità: ogni componente, l'uno indipendentemente dall'altro, viene ispezionato con probabilità α e non ispezionato con probabilità $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$; se trovato difettoso viene scartato.

Sia $N \geq 0$ il numero di componenti (funzionanti o difettosi) che passano il controllo di qualità finché il primo componente difettoso viene rilevato e sia $0 \leq K \leq N$ il numero dei componenti difettosi tra gli N che hanno superato il controllo di qualità.

i) Determinare la distribuzione di N.

ii) Calcolare il valore di attesa di N.

iii) Calcolare la varianza di N.

iv) Determinare la distribuzione congiunta di N e K.

v) Determinare la distribuzione di K condizionata a N.

vi) Calcolare il valore di attesa di K.

vii) Calcolare la covarianza tra N e K.

viii) Calcolare $\mathbb{E}\Big(\frac{K}{N+1}\Big)$.

Esercizio 2. Si consideri una bicicletta soggetta a forature. Più precisamente, i tempi di foratura sono τ_1, $\tau_1+\tau_2$, ..., $\tau_1+\cdots+\tau_n$, ... ove $\tau_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$ sono variabili aleatorie esponenziali di parametro $\lambda > 0$ indipendenti.

i) Determinare la distribuzione del tempo dell'n-ma foratura, ovvero di $\tau_1 + \cdots + \tau_n$.

ii) Dato $T > 0$, trovare la distribuzione del numero $N_{[0,T]}$ di forature nell'intervallo $[0, T]$.

iii) Dati $0 \leq T_1 < T_2 < T_3 < T_4$ siano rispettivamente $N_{[T_1,T_2]}$ e $N_{[T_3,T_4]}$ il numero di forature negli intervalli $[T_1, T_2]$ e $[T_3, T_4]$. Dimostrare che le variabili aleatorie $N_{[T_1,T_2]}$ e $N_{[T_3,T_4]}$ sono indipendenti.

iv) Per $n \geq 1$, siano X_1, ..., X_n variabili aleatorie uniformi in $[0, T]$ indipendenti. Sia inoltre $Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ la più piccola tra le X_i. Determinare la distribuzione di Y.

v) Dimostrare la seguente affermazione: condizionatamente all'evento $\{N_{[0,T]} = n\}$, il tempo di prima foratura τ_1 ha la stessa distribuzione della variabile aleatoria Y del punto precedente.

vi) Calcolare il valore di attesa di τ_1 condizionato a $N_{[0,T]}$ e verificare che $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\tau_1|N_{[0,T]})\big) = \mathbb{E}(\tau_1)$.