



Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**  
ESONERO DEL 24.4.2014, Canale A-H (L. Bertini)

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) \_\_\_\_\_

**N.B.** Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti. Non è necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

**Esercizio 1.** Un mazzo di carte napoletane è composto da 40 carte, ciascuna identificata da uno dei quattro semi (denari, coppe, spade e bastoni) e da un valore (intero) tra 1 e 10. Nello *scopone scientifico* a 4 giocatori (identificati con N,O,S,E) vengono distribuite a caso 10 carte ciascuno da un mazzo di carte napoletane. Il giocatore N gioca una delle sue 10 carte ed il giocatore O fa scopa se tra le sue 10 carte v'è una dello stesso valore di quella giocata da N. (*Il resto del gioco non è rilevante per questo esercizio.*)

- i) Calcolare la probabilità che N abbia tutte carte con valori diversi.
- ii) Calcolare la probabilità che N abbia tutte le 4 carte con valore 1.
- iii) Calcolare la probabilità che N abbia tutte le carte (8 in totale) con valori 1 e 2.
- iv) Calcolare la probabilità che N abbia 4 carte con lo stesso valore.  
(*Si osservi che N può avere una o due quaterne di carte con lo stesso valore.*)
- v) Calcolare la probabilità che N abbia (esattamente) 3 carte con lo stesso valore.

Viste la proprie carte, N gioca una carta tra quelle il cui valore compare più numeroso nella sua mano (in caso di pareggio sceglie la carta dal valore più basso).

- vi) Calcolare la probabilità che O faccia scopa dopo che N ha giocato la sua carta con lo strategia predetta.  
(*È sufficiente esprimere il risultato in funzione delle probabilità richieste in precedenza.*)
- vii) Un osservatore del gioco (che non vede le carte dei 4 giocatori) nota che N gioca una delle sue 10 carte e O fa scopa. Calcolare la probabilità che N abbia avuto tutte carte con valore diverso.  
(*È sufficiente esprimere il risultato in funzione delle probabilità richieste in precedenza.*)

**Esercizio 2.** Si consideri la distribuzione casuale di  $k$  palline indistinguibili in  $n$  scatole numerate da 1 a  $n$  con il vincolo che una scatola può contenere al massimo una pallina (quindi  $k \leq n$ ). Sia  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  l'evento in cui la scatola  $i$  è occupata.

- i) Descrivere esplicitamente lo spazio degli eventi elementari (o spazio campionario).
- ii) Calcolare la probabilità dell'evento  $A_i \cap A_j$ .
- iii) Per  $\ell = 1, \dots, k$  calcolare la probabilità di  $A_\ell$  condizionata a  $A_1 \cap \dots \cap A_{\ell-1}$ .

Si consideri il limite  $k, n \rightarrow \infty$  con  $k/n \rightarrow p \in (0, 1)$ .

- iv) Dimostrare che in questo limite gli eventi  $A_1$  e  $A_2$  diventano indipendenti.
- v) Dire, giustificando la risposta, se in questo limite gli eventi  $A_1, \dots, A_\ell$ , con  $\ell > 2$ , diventano indipendenti.