Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

Prof. L. Bertini - G. Nappo - F. Spizzichino

PROVA SCRITTA DEL 09.09.2010

**N.B.** Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti. Non è necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

NOME e COGNOME________________________________________ CANALE ____________________

**Esercizio 1.** Volendo organizzare una cena di incontro post-vacanze, contatto i miei colleghi A, B, C, D, E, F, G, ed H.

Supponiamo che la probabilità di rispondere positivamente, da parte di ciascun singolo collega, sia $p = 0.9$; supponiamo inoltre che le risposte dei diversi colleghi siano (stocasticamente) indipendenti fra loro.

*i)* Qual è la probabilità di risposta positiva da parte di esattamente 5 colleghi?

*ii)* Qual è la probabilità che partecipi H sapendo che il numero complessivo delle risposte positive è stato 5?

*iii)* Qual è la probabilità che partecipino sia A che H, sapendo che il numero complessivo delle risposte positivamente è stato 5?

**Supponiamo ora che le risposte da parte dei singoli colleghi non siano (stocasticamente) indipendenti fra loro:**

contatto A, B, ..., H uno dopo l'altro e a ciascuno riferisco circa le risposte dei precedenti.

Il collega A ha probabilità $p = 0.9$ di rispondere positivamente, tutti gli altri hanno probabilità $p = 0.9$ di rispondere positivamente se tutti gli altri già consultati hanno risposto positivamente; in caso contrario (cioè se almeno uno di loro ha risposto negativamente) tale probabilità scende a $p = 0.6$.

*iv)* Qual è la probabilità di ottenere risposta positiva da parte dei primi 5 colleghi e risposta negativa da parte degli ultimi 3?

*v)* [**Facoltativo**] Qual è la probabilità di risposta positiva da parte di esattamente 5 colleghi?

Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

Prof. L. Bertini - G. Nappo - F. Spizzichino

PROVA SCRITTA DEL 09.09.2010

**Esercizio 2.** Sia $N$ una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda > 0$, ovvero

$$P(N = n) = e^{-\lambda}/n!, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Una moneta truccata con probabilità di testa uguale a $p \in (0,1)$ viene lanciata $N$ volte (si osservi che $N$ è aleatorio). I risultati dei lanci della moneta sono indipendenti tra loro ed indipendenti da $N$. Siano $X$ e $Y$ rispettivamente il numero totale di teste e di croci ottenute, con la convenzione che, se $N = 0$, allora $X = Y = 0$.

*i)* Calcolare $P(X = 0, Y = 0)$ e $P(X = 0, Y = 1)$.

*ii)* Calcolare il valore atteso di $X$ condizionato ad $N = n$, per $n = 0, 1, \ldots$.

*iii)* Trovare la distribuzione marginale di $X$.

*iv)* Calcolare la distribuzione congiunta di $X$ e $Y$ verificando in particolare che sono variabili aleatorie indipendenti.

*v)* [**Facoltativo**] Calcolare la probabilità che $X$ sia pari.

Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

Prof. L. Bertini - G. Nappo - F. Spizzichino

PROVA SCRITTA DEL 09.09.2010

**N.B.** Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.
**ATTENZIONE: è necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo**

**Esercizio 3.** Sia $X$ una variabile aleatoria con densità uniforme nell'intervallo [1,a], con $a > 1$, ossia con densità

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ c & 1 < x \leq a, \\ 0 & x > a. \end{cases}$$

*i)* Calcolare $c$ e il valore atteso di $X$, in funzione di $a$.

**Si ponga ora $a = 3$.**

*ii)* Verificare che $c = \frac{1}{2}$, $E(X) = 2$ e $Var(X) = 1/3$.

*iii)* Trovare la funzione di distribuzione e disegnarne il grafico.

*iv)* Calcolare esattamente $P(|X - 2| \geq 3/4)$ utilizzando la funzione di distribuzione e trovarne una maggiorazione utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev.