Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

ESAME DEL 20.7.2021 Canale 1 (L. Bertini)

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi giustificando brevemente i passaggi svolti utilizzando al massimo un faccia A4 per ciascun esercizio.

Esercizio 1. Un mazzo di carte napoletane è costituito da 40 carte di 4 semi distinti numerate da 1 a 10. Alberto estrae una carta a caso dal mazzo e porge il resto del mazzo a Barbara che estrae due carte a caso.

a) Calcolare la probabilità che Alberto estragga un 7. Calcolare la probabilità che Barbara estragga un 3 e un 4.

b) Calcolare la probabilità che Alberto estragga un 7 e – allo stesso tempo – Barbara un 3 e un 4.

c) Sapendo che la carta estratta da Alberto è maggiore o uguale a 8, calcolare la probabilità che la somma della due carte estratte da Barbara sia pari a 7.

d) Sapendo che la somma della due carte estratte da Barbara è pari a 7, calcolare la probabilità che la carta estratta da Alberto sia maggiore o uguale a 8.

Esercizio 2. Per $\ell \in \mathbb{N}$ si considerino ℓ^2 celle collocate nei vertici di una griglia quadrata $\ell \times \ell$. Si dispongono a caso n palline nelle ℓ^2 celle, ovvero ogni pallina – l'una indipendentemente dall'altra – sceglie una cella con probabilità uniforme. Una cella C è *vuota* se non è occupata da alcuna pallina. Una cella C è *libera* se è vuota e tutte le celle nella stessa riga e colonna di C sono vuote. Sia infine X il numero di celle libere.

a) Calcolare la probabilità che una cella sia vuota.

b) Calcolare la probabilità che una cella sia libera.

c) Calcolare il valore di attesa e la varianza di X.

d) Sia $n = \ell\lfloor\log \ell\rfloor$ ove $\lfloor\cdot\rfloor$ indica la parte intera. Calcolare il limite di $\mathbb{E}(X)$ per $\ell \to \infty$.

Esercizio 3. Durante il regno di Mongke Khan, la posta viaggiava lungo la strada dello Yam. A distanze regolari i postini potevano utilizzare delle stazioni per cambiare i cavalli e percorrere migliaia di chilometri con facilità. Supponiamo che un messo debba compiere un lungo viaggio passando per $n = 400$ stazioni di servizio (oltre a quella di partenza) per portare a destinazione un messaggio di Mongke Khan. Sia T_i il tempo impiegato a coprire il percorso tra la $i-1$-esima e la i-esima stazione. Assumiamo che le $(T_i)_{i=1}^{400}$ siano delle variabili aleatorie indipendenti, identicamente distribuite e tali che

$$\mathbb{P}(T_i \geq t) = (1 + \lambda t)\, \exp(-\lambda t) \qquad \forall t \geq 0,\, i = 1, \dots, 400$$

per un'opportuna costante $\lambda > 0$.

a) Tale equazione identifica la legge di T_i?

b) Calcolare la densità di probabilità di T_i.

c) Calcolare il valore di attesa e la varianza di T_i.

Prima di partire, il messo deve stimare il tempo di percorrenza $\sum_{i=1}^{400} T_i$ del suo viaggio. Egli deve comunicare al Mongke Khan un tempo stimato τ, tale che la probabilità che egli impieghi più di τ ad arrivare a destinazione sia minore del 5%.

d) Supponendo che il messo disponesse delle tavole dell'integrale gaussiano[1], ed effettuando la dovuta approssimazione, determinare la migliore scelta di τ (in funzione di λ).

[1] Le tavole dell'integrale gaussiano furono tra le prime tavole numeriche di funzioni speciali ad essere compilate. Comunque oltre cinque secoli dopo il Mongke Khan.