Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

ESAME DEL 28.6.2021 Canale 1 (L. Bertini)

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi giustificando brevemente i passaggi svolti utilizzando al massimo un faccia A4 per ciascun esercizio.

Esercizio 1. Si dispone di una lista di 12 persone divise in tre gruppi, rispettivamente indicati con A,B e C, di 4 persone. Una commissione viene formata scegliendo a caso 2 persone distinte tra le 12.

a) Calcolare la probabilità che le due persone selezionate siano delle stesso gruppo.

In effetti, la procedura per la formazione della commissione è più macchinosa[1]. Prima vengono selezionate due terne dalle 12 persone e vengono inserite in due urne, poi si sceglie a caso un commissario da ciasuna urna. Si ha pieno controllo sulla scelta delle due terne, ma non sull'estrazione dalle due urne; si vuole organizzare le due terne in modo da non privilegiare alcun gruppo e minimizzare la probabilità che i due commissari siano dello stesso gruppo.

b) Supponendo di inserire nella prima urna e nella seconda urna persona del gruppo A, una del gruppo B ed una del gruppo C, calcolare la probabilità che i due commissari selezionati siano dello stesso gruppo.

c) Supponendo di inserire nella prima urna due persone del gruppo A ed una del gruppo C e nella seconda urna due persone del gruppo B ed una del gruppo C, calcolare la probabilità che i due commissari selezionati siano dello stesso gruppo.

d) Mostrare che è possibile effettuare una scelta aleatoria delle due terne in modo che i due commissari selezionati sono certamente di gruppi diversi e siano: uno del gruppo A e uno del gruppo B, uno del gruppo A e uno del gruppo C oppure uno del gruppo B e uno del gruppo C con la stessa probabilità (quindi pari a 1/3).

Esercizio 2. Alice (A), Barbara (B) e Carlo (C) competono tra loro in un torneo con le seguenti modalità. Nel primo incontro si sfidano A e B. Il vincitore gioca poi contro C, se vince anche questo incontro è proclamato vincitore assoluto; se invece vince C, costui gioca contro il perdente dell'incontro precedente e così di seguito. Il primo giocatore a vincere due incontri consecutivi vince il torneo. Si tenga presente che A,B,C hanno la stessa abilità nel gioco e pertanto ogni incontro è vinto da uno dei due contendenti con probabilità 1/2.

a) Calcolare la probabilità che il torneo finisca dopo n incontri, $n \geq 2$.

b) Calcolare le probabilità di vittoria per A,B e C.

c) Il torneo potrebbe non avere mai termine?

Esercizio 3. Vi sono due tipi di batterie: quello normale ha un tempo di durata descritto da una variabile aleatoria esponenziale con valore di attesa pari a 30 ore, quello a lunga durata ha un tempo di durata descritto da una variabile aleatoria esponenziale con valore di attesa pari a 100 ore. In una scatola sono presenti 7 batterie normali e 3 a lunga durata. Si sceglie a caso una batteria dalla scatola (senza vedere di che tipo sia) e la si utilizza per una radio che viene tenuta accesa fino al termine della batteria.

a) Calcolare la densità di probabilità ed il valore di attesa della variabile aleatoria che descrive il tempo di funzionamento della radio.

b) Nelle prime 40 ore la radio ha trasmesso esclusivamente musica barocca. A questo punto è stata annunciata la messa in onda di un concerto rock della durata di 2 ore. Calcolare la probabilità che si riesca ad ascoltare tutto il concerto prima che la batteria si esaurisca.

c) Dopo il concerto rock (che si è effettivamente ascoltato integralmente) viene trasmessa un'opera lirica della durata di 3 ore che si riesce ad ascoltare fino al termine. Calcolare la probabilità che la batteria nella radio sia del tipo a lunga durata.

[1] La procedura descritta è utlizzata nel nostro Ateneo.