Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

ESOME DEL 17.7.2014, Canale A-H (L. Bertini)

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.

Esercizio 1. Alberto dispone di una moneta che rende testa con probabilità $p_A \in (0,1)$ (e croce con probabilità $1 - p_A$) e di un'urna che contiene inizialmente una palla verde ed una rossa. Alberto lancia la moneta: se esce croce aggiunge una palla verde nell'urna (e poi lancia di nuovo la moneta), se invece esce testa egli estrae una palla dall'urna.

(a) Calcolare la probabilità che la pallina estratta da Alberto sia verde. *[È richiesto svolgere il calcolo esplicito]*

(b) Sapendo che Alberto ha estratto una pallina verde, determinare la legge del numero totale di palline nell'urna subito prima dell' estrazione di Alberto.

Alberto reinserisce la palla estratta nell'urna ed il turno passa a Barbara, la quale dispone di una moneta che rende testa con probabilità $p_B \in (0,1)$. Analogamente ad Alberto, Barbara lancia la propria moneta: se esce croce aggiunge una palla *rossa* nell'urna (e poi lancia di nuovo la moneta), se invece esce testa ella estrae una palla dall'urna.

(c) Calcolare la probabilità che la pallina estratta da Barbara sia rossa.

(d) Determinare la legge del numero totale di palline nell'urna subito prima dell' estrazione di Barbara.

Barbara reinserisce la palla estratta nell'urna ed il turno passa ad Alberto, che procede come sopra. E così di seguito.

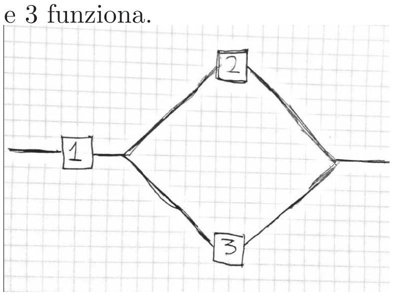
(e) Calcolare il valore di attesa del numero totale di palline nell'urna subita prima dell'n-esima estrazione di Barbara.

Sia P_n la probabilità che Barbara estragga una palla rossa all'n-esima estrazione.

(f) Calcolare il limite di P_n quando $n \to \infty$. [*Suggerimento*: non calcolare esplicitamente P_n per n fissato].

Esercizio 2. Si consideri il circuito in figura, dove i tempi di rottura dei componenti 1, 2, 3 sono variabili aleatorie esponenziali indipendenti rispettivamente di parametri λ_1, λ_2, λ_3.

Figure 1: Il circuito si considera funzionante se il componente 1 funziona ed almeno uno tra i componenti 2 e 3 funziona.



(a) Determinare la legge del tempo di rottura del circuito.

(b) Calcolare esplicitamente il valore di attesa del tempo di rottura del circuito.

(c) Sapendo che al tempo T il circuito funziona, calcolare la probabilità che uno tra i componenti 2 e 3 si sia rotto.

Supponiamo adesso $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 =: \lambda = 1 s^{-1}$. L'Anonima Circuiti® mette in commercio circuiti (del tipo in figura) in scatole da 10.000 pezzi, garantendo un tempo di funzionamento T. Il servizio di garanzia considera una scatola difettosa se almeno 100 pezzi si sono rotti prima di T.

(d) Come scegliere il valore massimo di T in modo tale che vi siano meno del 10% di scatole difettose? *[Usare un'approssimazione gaussiana]*

Esercizio 3. Dato $n \geq 2$, sia π una permutazione di $\{1, \ldots, n\}$ scelta con probabilità uniforme.

(a) Calcolare la probabilità che π non abbia punti fissi.

(b) Calcolare la probabilità che π abbia (esattamente) k punti fissi, $k = 0, \ldots, n$.

Sia Z_n il numero di punti fissi di π.

(c) Calcolare il valore di attesa di Z_n. *[Osservazione: si può rispondere a questa domanda senza aver svolto il punto (b)]*

(d) Dimostrare che Z_n, nel limite $n \to \infty$, converge in legge ad una variabile di Poisson.