Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

ESOME DEL 30.6.2014, Canale A-H (L. Bertini)

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ______________________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.

Esercizio 1. Un mazzo di carte francesi è composto da 52 carte, ciascuna identificata da uno dei quattro semi (picche, cuori, quadri e fiori) e da un valore (intero) tra 1 e 13. Nel gioco del *bridge*, a 4 giocatori (identificati con N,O,S,E) vengono distribuite a caso 13 carte ciascuno da un mazzo di carte francesie.

i) Calcolare la probabilità che N abbia esattamente una carta di picche.

ii) Calcolare la probabilità che N abbia esattamente una carta in almeno uno dei quattro semi.

iii) Calcolare la probabilità che almeno uno dei quattro giocatori abbia esattamente una carta di picche.

iv) Calcolare il valore di attesa del numero di carte di picche di N.

Il giocatore S scopre le sue carte, tra le quali vi sono esattamente 3 carte di picche. Rispondere alle due domande seguenti tenendo conto di questa informazione.

v) Sapendo che N ha 5 carte di picche, calcolare la probabilità che le rimanenti 5 carte di picche siano distribuite 3 e 2, ovvero che E abbia 3 picche e O 2 picche oppure che O abbia 3 picche e E 2 picche.

vi) Calcolare il valore di attesa della variabile aleatoria $X_O =$'numero di carte di picche di O', condizionato alla variabile aleatoria $X_N =$'numero di carte di picche di N'.

Nella sua carriera di giocatore, Giorgio Belladonna ha giocato $N = 10^6$ mani di bridge.

vii) Quante mani di bridge ha giocato – in media – Belladonna con esattamente una carta di picche?

viii) Utilizzando un'opportuna approssimazione gaussiana, determinare il valore massimo di k per cui la probabilità che Belladonna abbia giocato almeno k mani di bridge con esattamente una carta di picche sia più di 0.16.

Esercizio 2. Si considerino lanci ripetuti di una moneta truccata con probabilità di testa pari a $p \in (0,1)$ e di croce pari a $1-p$. Sis $X = 1, 2, \ldots$ il numero di lanci consecutivi il cui esito è uguale al primo; ad esempio $X = 3$ se sono uscite tre teste e poi una croce oppure tre croci e poi una testa.

i) Determinare la distribuzione di X.

ii) Calcolare il valore di attesa di X.

iii) Calcolare la varianza di X.

Sia $Y = 1, 2, \ldots$ il numero di lanci consecutivi con lo stesso risultato successivi ai primi X lanci; ad esempio se $X = 3$ allora $Y = 2$ quando il quarto ed il quinto lancio sono uguali (necessariamente diversi dai primi tre) mentre il sesto è diverso (e quindi necessariamente uguale ai primi tre).

iv) Determinare la distribuzione congiunta di X e Y.

v) Dire, motivando la risposta e fornendo una spiegazione euristica, se le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti.

Si consideri il caso in cui $p = \lambda/n$, $\lambda > 0$ e si ponga $X_n := X/n$.

vi) Determinare il limite (in legge) per $n \to \infty$ della successione di variabili aleatorie $\{X_n\}$.

Esercizio 3. Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione geometrica. Si ponga $U := \min\{X, Y\}$ e $V := X - Y$.

i) Trovare la distribuzione di U.

ii) Trovare la distribuzione di V.

iii) Dire, giustificando la risposta, se le variabili aleatorie U e V sono indipendenti.