Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

ESAME DEL 8.07.2011, Canale A-H (L. Bertini)

Esercizio 1. In una piccola biblioteca di classe ci sono 100 libri: 50 romanzi italiani, 30 romanzi francesi e 20 romanzi inglesi. Alla fine dell'anno scolastico, Luigi, che è risultato il migliore della classe, ha letto in tutto 30 romanzi, di cui: 10 italiani, 10 francesi e 10 inglesi.

Supponiamo, che alla fine dell'anno scolastico, il migliore della classe venga premiato con il regalo di 20 libri scelti a caso fra i 100 della libreria.

i) Calcolare la probabilità che fra i 20 romanzi regalati ce ne siano 10 italiani, 5 francesi e 5 inglesi.

ii) Calcolare la probabilità che fra i 20 romanzi regalati, Luigi ne abbia già letti 8 (esattamente).

iii) Calcolare la probabilità che fra i 20 romanzi regalati, Luigi ne abbia già letti 4 (esattamente) italiani, 2 (esattamente) francesi e 2 (esattamente) inglesi.

Supponiamo ora che i romanzi regalati siano stati scelti fra i romanzi della biblioteca, prendendone 10 a caso fra quelli italiani, 5 fra quelli francesi e 5 fra quelli inglesi.

iv) Calcolare la probabilità dei seguenti tre eventi:
(a) "fra i 10 romanzi italiani regalati, Luigi ne ha già letti 4 (esattamente)"
(b) "fra i 5 romanzi francesi regalati, Luigi ne ha già letti 2 (esattamente)"
(c) "fra i 5 romanzi inglesi regalati, Luigi ne ha già letti 2 (esattamente)"

v) Calcolare la probabilità che fra i 20 romanzi regalati, Luigi ne abbia già letti 4 (esattamente) italiani, 2 (esattamente) francesi e 2 (esattamente) inglesi.

Esercizio 2. Un sacchetto contiene m palline numerate da 1 a m, $m \geq 1$. Viene estratta una pallina a caso e sia N il corrispondente numero estratto. Se $N = n$, viene lanciata una moneta equilibrata n volte. Sia X il numero di teste ottenute con questo procedimento.

i) (a) Sapendo che $N = 5$, calcolare la probabilità dell'evento $X = 3$.
(b) Sapendo che $N = 2$, calcolare la probabilità dell'evento $X = 3$.

ii) Calcolare la probabilità dell'evento $X = 3$.

iii) Dire se le variabili aleatorie X e N sono indipendenti giustificando la risposta.

iv) Sapendo che $X = 3$, calcolare la probabilità dell'evento $N = 5$.

v) Calcolare $\mathbb{E}(X|N = n)$ ed $\mathbb{E}(X)$.

Esercizio 3. Si consideri il modello probabilistico relativo alla disposizione di n palline indistinguibili in r scatole, $n \leq r$, con il vincolo che ci sia al massimo una pallina per scatola (probabilità uniforme sui corrispondenti $\binom{r}{n}$ eventi elementari). Sia X_i il numero di palline nella scatola i, con $i = 1, \dots, r$.

i) Trovare la distribuzione di X_i, $i = 1, \dots, r$.

ii) Trovare la distribuzione congiunta di X_i e X_j, $i \neq j = 1, \dots, r$.

iii) Calcolare $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$, $i, j = 1, \dots, r$.

Si consideri ora il limite $n \to \infty$, $r \to \infty$ con $n/r \to \rho \in (0, 1)$

iv) Trovare la distribuzione limite di X_i, $i = 1, \dots, r$.

v) Dimostrare che per $i \neq j$ le variabili aleatorie X_i e X_j sono asintoticamente indipendenti, ovvero

$$\lim_{\substack{n,r\to\infty \\ n/r\to\rho}} \Big[\mathbb{P}(X_i = k, X_j = h) - \mathbb{P}(X_i = k)\mathbb{P}(X_j = h)\Big] = 0, \qquad k, h = 0, 1$$