Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

ESAME DEL 21.06.2011, Canale A-H (L. Bertini)

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____________________

Esercizio 1. Il giuoco del *poker* consiste in una scelta casuale di 5 carte da un mazzo di 52 carte (diviso in 4 semi con 13 carte per seme).

i) Supponendo di scegliere le 5 carte contemporaneamente (ovvero non si distingue l'ordine), calcolare il numero di possibili scelte. Se invece si distinguesse l'ordine quante sarebbero?

ii) Calcolare la probabilità di avere *poker d'assi* (tra le 5 carte scelte ci sono i 4 assi).

iii) Calcolare la probabilità che le 5 carte scelte siano tutte dello stesso seme.

iv) Calcolare la probabilità di avere *scala reale*, ovvero le 5 carte scelte sono tutte dello stesso seme e sono una delle successioni $1, 2, 3, 4, 5$; $2, 3, 4, 5, 6$; $\dots$; $9, 10, 11, 12, 13$; $10, 11, 12, 13, 1$.

v) Sapendo che le 5 carte scelte sono tutte delle stesso seme, calcolare la probabilità di avere *scala reale*.

Esercizio 2. Una parete artificiale per l'arrampicata sportiva è composta da n settori di difficoltà crescente. Un arrampicatore ha probabilità $p \in (0, 1)$ di superare il primo settore. Inoltre, se supera il $k-1$-mo settore, con $2 \le k \le n$, ha probabilità p^k di superare il settore successivo (ovviamente, se non ha superato il $k-1$-mo settore, non ha superato nemmeno il k-mo).

i) Si dimostri, per induzione su $k = 1, 2, \dots, n$, che la probabilità che l'arrampicatore superi il k-mo settore è $p^{k(k+1)/2}$.

ii) Calcolare la probabilità che l'arrampicatore sia caduto nel k-mo settore, cioè che abbia superato e il settore $k-1$-mo ma non il k-mo.

iii) Sapendo che l'arrampicatore non ha superato l'intera parete, calcolare la probabilità che sia caduto nel k-mo settore.

Si consideri ora il caso di una parete con $n = 3$ settori e $p = 2/3$. L'arrampicatore esegue m tentativi di scalata. Assumendo indipendenza tra i diversi tentativi, si denoti con X_m il numero di volte che l'arrampicatore completa la parete senza cadere.

iv) Utilizzando la diseguaglianza di Chebyshev, trovare una limitazione inferiore per $\mathbb{P}\Big(X_m > \mathbb{E}(X_m) - \frac{m}{10}\Big)$. Si determinino inoltre dei valori di m per cui la precedente probabilità è almeno $9/10$.

Esercizio 3. Siano $X_1, \dots, X_N$ variabili di Poisson di parametro $\lambda > 0$ indipendenti.

i) Dato $k \in \mathbb{Z}_+$, calcolare $\mathbb{P}\Big(X_1 = i \,\Big|\, \sum_{h=1}^N X_h = k\Big)$, $i = 0, 1, \dots$ Dare inoltre un'interpretazione modellistica del risultato.

ii) Dato $k \in \mathbb{Z}_+$, calcolare $\mathbb{P}\Big(X_1 = i, X_2 = j \,\Big|\, \sum_{h=1}^N X_h = k\Big)$, $i, j = 0, 1, \dots$ Dare inoltre un'interpretazione modellistica del risultato.

iii) Data una successione $\{\kappa_N\} \subset \mathbb{Z}_+$ tale che $\lim_{N\to\infty} \kappa_N/N = \rho > 0$, calcolare

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(X_1 = i, X_2 = j \,\Big|\, \sum_{h=1}^N X_h = \kappa_N\Big), \qquad i, j = 0, 1, \dots$$