- V.A. MULTINOMIALE : COVARIANZA

$(X_1, X_2, X_3) \sim \text{Mult}(n; p_1\, p_2\, p_3)$

$$\mathbb{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = n_3) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}\, p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$$

$n_1 + n_2 + n_3 = n$

$\text{COV}(X_1, X_2) = ?$

I^a sol calcolo diretto : per voi

II^a sol via attesa condizionata

$$\text{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(X_2)$$

$X_1 \sim \text{Bin}(n, p_1)$ $\quad X_2 \sim \text{Bin}(n, p_2)$ $\quad \mathbb{E}(X_1)\, \mathbb{E}(X_2) = n^2 p_1 p_2$

inserisco $\mathbb{E}(\cdot \mid X_2)$

$$\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(\, \mathbb{E}(X_1 X_2 \mid X_2)\,)$$

per $\mathbb{E}(\cdot \mid X_2)$ X_2 è costante

legge condizionata

$$X_1 \mid X_2 \sim \text{Bin}\left(n - X_2, \frac{p_1}{p_1 + p_3}\right)$$

$$\mathbb{E}(X_1 \mid X_2) = (n - X_2)\, \frac{p_1}{p_1 + p_3}$$

$$\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}\left(X_2 (n - X_2) \frac{p_1}{p_1 + p_3} \right)$$

se $Y \sim \text{Bin}(m, \alpha)$ $\qquad \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{V}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2$

$$= m\alpha(1-\alpha) + m^2 \alpha^2$$

$$= \frac{p_1}{p_1 + p_3} \left\{ n \underbrace{\mathbb{E}(X_2)}_{= n p_2} - \underbrace{\mathbb{E}(X_2^2)}_{= n p_2 (1 - p_2) + n^2 p_2^2} \right\}$$

(7.75

$$= \frac{p_1}{p_1+p_3} \left\{ n^2 p_2 \underbrace{(1-p_2)}_{\shortparallel \atop p_1+p_3} - n p_2 \underbrace{(1-p_2)}_{\shortparallel \atop p_1+p_3} \right\}$$

$$= p_1 p_2 \left\{ n^2 - n \right\}$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)$$

$$= p_1 p_2 (n^2 - n) - n p_1 \, n p_2$$

$$= - n p_1 p_2$$

giustamente $\mathrm{cov}(X_1, X_2) < 0$

11. VARIABILE ALEATORIA ESPONENZIALE

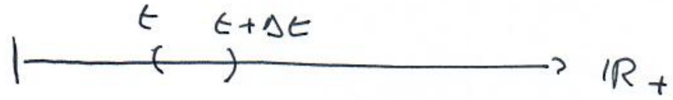
Teoria dell'affidabilità. Macchina soggetta a ~~gest~~ guasti che opera nel tempo (continuo non più cicli)

~~$\mathbb{P}$ ~ v.a.~~

Modello semplice senza logorio (invecchiamento)

T = tempo ~~...~~ di rottura $\sim$ v.a. exp.

$T \geq 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{P}(T = t) = 0$



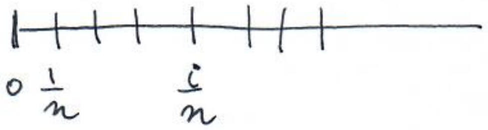
Modello analogo al caso di v.a. geometrica

- $\mathbb{P}($ si rompe in $(t, t+\Delta t)\ ) \propto \Delta t = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

  λ = tasso di rottura

- indipendenza in intervalli disgiunti

⊙ Facciamolo bene: divido $\mathbb{R}_+$ in intervalli di ampiezza $\frac{1}{n}$



$$X_i^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{se rottura in } \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(trascuro)

prob $= \frac{\lambda}{n} + \cancel{o\left(\frac{1}{n}\right)}$

prob $= 1 - \frac{\lambda}{n} + \cancel{o\left(\frac{1}{n}\right)}$

$X_i^{(n)} \sim \text{Bern}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ iid $\quad i = 1, 2, \ldots$

ora

$T^{(n)}$ = tempo di rottura $= \frac{1}{n} \underbrace{\inf\{i \geq 1 : X_i^{(n)} = 1\}}_{\substack{\| \\ \tau^{(n)} \sim Geom(\frac{\lambda}{n})}}$

è parente del limite di Poisson

$$X^{(n)} \sim Bin(n, \tfrac{\lambda}{n}) \qquad X^{(n)} \to Poisson(\lambda)$$

ma ora guardiamo il tempo di primo successo riscalato con $1/n$

$$\tau^{(n)} \sim Geom(\tfrac{\lambda}{n}) \qquad \frac{1}{n}\tau^{(n)} \to ?$$

<u>OSS</u> $\quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\tau^{(n)}\right) = \frac{1}{n} \frac{1}{p} = \frac{1}{n}\frac{n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

si mantiene costante in n
(è la cosa giusta)

ora $\tau^{(n)} = 1, 2, \dots$

$$\frac{1}{n}\tau^{(n)} = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots$$

~~Quindi / Potrebbe~~ in che senso possiamo fare $\lim_n$?

Evidentemente $\frac{1}{n}\tau^{(n)}$ diventerà v.a. continua

$$\forall t \geq 0 \qquad \mathbb{P}\left(\frac{\tau^{(n)}}{n} = t\right) \to 0$$

Guardiamo la funzione di sopravvivenza

$\mathbb{P}\left(\frac{\tau^{(n)}}{n} > t\right) = \mathbb{P}$(funziona al tempo t) avrà senso nel limite $n \to \infty$

<u>TEO</u> (convergenza geometrica all'esponenziale)

$$\tau^{(n)} \sim \text{Geom}\left(\frac{\lambda}{n}\right) \qquad \lambda > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\tau^{(n)}}{n} > t\right) = e^{-\lambda t} \qquad t \in [0,+\infty)$$

<u>dim</u> basta scrivere

$$\mathbb{P}(\tau^{(n)} > nt) = \mathbb{P}(\tau^{(n)} > \lfloor nt \rfloor)$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor nt \rfloor} \qquad \text{se } \tau \sim \text{Geom}(p)$$

$$\mathbb{P}(\tau > k) = q^k$$

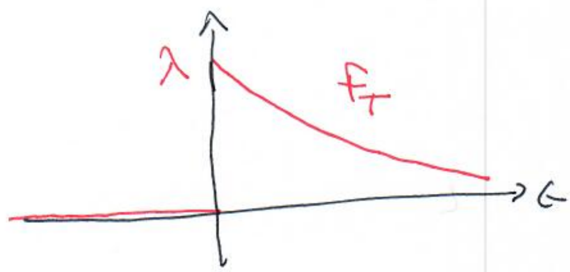
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda t} \qquad q = 1-p$$

⊙ V.A. esponenziale

$$T \sim \text{Exp}(\lambda) \qquad \text{Im}(T) = [0,+\infty) \qquad T \geq 0$$

con densità di probabilità $\qquad \lambda > 0$
(tasso di rottura)

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

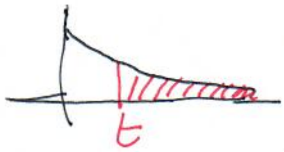


ecco perché si chiama v.a. esponenziale

$$1 \overset{?}{=} \text{Area}\Big(\ $$  $$\ \Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)\,dt = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1$$

- Funzione di sopravvivenza

$t \geq 0$

$$\mathbb{P}(T > t) = \text{Area}\Big(\ \text{}$$  $$\Big) = \int_t^{\infty} f_T(s)\, ds$$

$$= \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda s}\, ds = e^{-\lambda t}$$

<u>Teo'</u> (riformulazione Teo di prima)

$$\tau^{(n)} \sim \text{Geom}\left(\frac{\lambda}{n}\right) \qquad \frac{1}{n}\tau^{(n)} \to \text{Exp}(\lambda)$$

nel senso che $\forall t \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\tau^{(n)} > t\right) \longrightarrow \mathbb{P}(T > t) \qquad T \sim \text{Exp}(\lambda)$$

- Valore di attesa

$$\mathbb{E}(T) \overset{\text{dovrà venire}}{=} \frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\tau^{(n)}\right)$$

$$\mathbb{E}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_T(t)\, dt = \int_0^{\infty} \lambda t\, e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$$

in effetti T si misura in secondi

λ " " " 1/secondi (e qualcosa

$\Rightarrow$ qualcosa senza unità di misura)

per omogeneità:

$\mathbb{E}(T)$ ~~$\propto$~~ $\propto \frac{1}{\lambda}$ per scoprire $= \frac{1}{\lambda}$ bisogna fare l'integrale infatti, integrando per parti,

$$\int_0^\infty \lambda t\, e^{-\lambda t}\, dt = \int_0^\infty t \cancel{\lambda} \frac{d}{dt}\left(-\cancel{\lambda} e^{-\lambda t}\right) dt$$

$$= \underbrace{t\left(-\cancel{\lambda} e^{-\lambda t}\right)\Big|_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty \underbrace{\frac{d}{dt}(t)}_{=1}\, e^{-\lambda t}\, dt}_{= 1/\lambda}$$

per il trucco per calcolare $\mathbb{E}(\tau)$ con $\tau \sim \mathrm{Geom}(p)$

è buono pure qui

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \int_0^\infty \underbrace{t\, e^{-\lambda t}}_{= \frac{d}{d\lambda}\left(-e^{-\lambda t}\right)} dt$$

(da giustificare)

$$= \lambda \frac{d}{d\lambda}\left(-\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt\right) = \lambda \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

- $\mathbb{V}(T) = ?$

$$\mathbb{E}(T^2) = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{1}{\lambda} = \lambda \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$ (se volete integrate 2 volte per parti)

$$\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

per omogeneità $\mathbb{V}(T) \propto \frac{1}{\lambda^2}$ (si deve misurare in secondi^2)

Anche $\tau^{(n)} \sim \mathrm{Geom}(\lambda/n)$

$$\mathbb{V}\left(\frac{\tau^{(n)}}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(\tau^{(n)}) = \frac{1}{n^2} \frac{1-\frac{\lambda}{n}}{(\lambda/n)^2} \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2}$$

- <u>Perdita di memoria v.a. esponenziale</u>

Stessa interpretazione che per geometrica

sapendo $T > t$, prob $T > t+s$

è come sostituire la macchina e $T > s$

$T \sim Exp(\lambda)$

$t, s \geq 0$

$$\mathbb{P}(T > t+s \mid T > t) = \mathbb{P}(T > s)$$

infatti

$$\mathbb{P}(T > t+s \mid T > t) = \frac{\mathbb{P}(T > t+s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

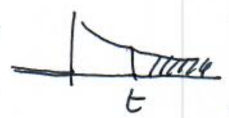
Come nel caso della v.a. geometrica, la perdita di memoria caratterizza la v.a. esponenziale

<u>Prop</u> sia $T \geq 0$ v.a. continua

t.c.
$$\mathbb{P}(T > t+s \mid T > t) = \mathbb{P}(T > s) \quad \forall\, t, s \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad T \sim Exp(\lambda) \quad \text{per qualche } \lambda > 0$$

<u>dim</u>

Sia $G(t) := \mathbb{P}(T > t)$ $\quad t \geq 0$ $\quad$ = Area()

basta scoprire che $G(t) = e^{-\lambda t}$ per qualche $\lambda > 0$

Da G recupero tutte le informazioni.

Ad esempio, per il teorema fondamentale del calcolo,

$$f_T(t) = - G'(t) \qquad \text{densità di probabilità}$$

La Perdita di memoria mi dice

$$\frac{G(t+s)}{G(t)} = G(s) \quad \Leftrightarrow \quad G(t+s) = G(t)\, G(s)$$

Si dice bene nel linguaggio dell'algebra : (~~...~~ $G>0$)

G omomorfismo da $\mathbb{R}, +$ a $\mathbb{R}_+, \cdot$

Evidentemente $G(t) = e^{-\lambda t}$ $\lambda > 0$ soddisfa
(~~...~~ $0 < G < 1$ per definizione)

Ve ne sono altri ?

Serve una condizione in più !

Se G è continua $\Rightarrow$ $G(t) = e^{-\lambda t}$

Nell'enunciato criptico del teorema si deve leggere
~~...~~ T v.a. continua $\Rightarrow$ ~~...~~ G funzione continua

Lo dimostro assumendo $G \in C^1$

poiché $G \in C^1$

$$G(t) = \underbrace{G(0)}_{=1} + \underbrace{G'(0)\, t}_{=-\lambda} + o(t) = 1 - \lambda t + o(t)$$

Sia ora $g(t) = \lg G(t)$

Da perdita di memoria $g(t+s) = g(t) + g(s)$

ovvero

$$g(t+s) - g(s) = g(t)$$

divido per t e $t \downarrow 0$

$$g'(s) = \cancel{t} \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} g(t) =$$

$$= -\lambda$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \lg(1 - \lambda t + o(t)) = -\lambda$$

Poiché $g(0) = \lg G(0) = 0$

trovo $g(t) = -\lambda t \Rightarrow G(t) = e^{-\lambda t}$