PROCESSI DI GALTON - WATSON

- Modello di ~~[illegible]~~ evoluzione di popolazioni
  [riproduzione asessuata]

$t=0$ 1 INDIVIDUO "Adamo"

$t=1$ j FIGLI CON PROB. p_j $j=0,1,\dots$

$t=2$ ogni figlio di Adamo figlia con le stesse modalità, l'uno indipendentemente dall'altro

$\vdots$

Cosa succede per $t \to \infty$. La specie si estingue o sopravvive?

d_n = probabilità estinzione generazione n

~~[illegible]~~

$d_1 = p_0$ = $\mathbb{P}$(Adamo non ha figli)

$d_2 = \dots$

$\vdots$

$\mathbb{P}$(prima o poi si estingue) $\begin{cases} = 1 \\ < 1 \end{cases}$?

Dipende dalla legge riproduttiva

μ = distribuzione # figli di adamo

$\mu(j)$ = $\mathbb{P}$(Adamo ha j figli) $j=0,1,\dots$

μ è una probabilità su $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$

- Scriviamo in formule le regole dinamiche

Z_n = # individui generazione n

v.a. a valori $\mathbb{Z}_+$, $\quad Z_0 = 1$

X_i^n = # figli del genitore i presenti nella generazione n

$\{X_i^n\}$ iid con legge μ

Allora

$$\begin{cases} Z_{n+1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n}_{= \text{\# individui generazione } n+1} \\ Z_0 = 1 \end{cases}$$

Z_n: # individui generazione n

X_i^n = # figli del genitore i

[convengo $\sum_{\emptyset} = 0$]

- Per capire cosa aspettarci, calcoliamo $\mathbb{E}(\cdot)$

$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} j\, \mu(j) = \mathbb{E}(X_i^n)$ = # medio di figli

via attesa condizionata

$$\gamma_{n+1} = \mathbb{E}(Z_{n+1}) = \sum_{z=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = z)\, \mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = z)$$

$$= \sum_{z=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = z) \underbrace{\sum_{i=1}^{z} \underbrace{\mathbb{E}(X_i^n)}_{=\alpha}}_{=\alpha z} = \alpha\, \mathbb{E}(Z_n) = \alpha \gamma_n$$

$$\begin{cases} \gamma_{n+1} = \alpha \gamma_n \\ \gamma_0 = 1 \end{cases} \qquad \gamma_n = \mathbb{E}(Z_n) = \alpha^n$$

$\alpha > 1$ cresce geometricamente

$\alpha < 1$ decresce "

$\alpha = 1$ $\qquad \mathbb{E}(Z_n) = 1$

"evoluzione malthusiana a tempo discreto"

La nostra domanda era un po' più raffinata, non su quello che succede "in media".

Abbiamo però capito che è determinante $\alpha \gtreqless 1$.

$$d_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$$

evidentemente $d_n \uparrow$ $\qquad d_0 = 0 \qquad d_1 = \mu(\{0\})$

$\ldots$

$$\lim_n d_n \begin{cases} = 1 \\ < 1 \end{cases} \;?$$

(si estingue con prob. 1)

<u>Teo</u>

se $\alpha \leq 1 \implies d_n \to 1$

$\alpha > 1 \implies d_n \to d^* < 1$

dim

Si tratta di ricavare un'equazione per d_n e capire cosa succede per $n \to \infty$

- probabilità totali condizionando a Z_1

$$d_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1}=0) = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(Z_1=j)}_{=\mu(j)} \mathbb{P}(Z_{n+1}=0 \mid Z_1=j)$$

Ora:

- $\mathbb{P}(Z_{n+1}=0 \mid Z_1=0) = 1$
- $\mathbb{P}(Z_{n+1}=0 \mid Z_1=1) = d_n$

Adamo ha avuto 1 figlio: è la stessa domanda con $n+1 \to n$

- $\mathbb{P}(Z_{n+1}=0 \mid Z_1=2) = d_n^2$

Adamo ha avuto Caino e Abele, ma le loro discendenze sono indipendenti
$\mathbb{P}$(entrambe estinte) $= \mathbb{P}$(una estinta$)^2$

$\vdots$

- $\mathbb{P}(Z_{n+1}=0 \mid Z_1=j) = d_n^j$

$\vdots$

ovvero

$$\begin{cases} d_{n+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(j)\, d_n^j \\ d_0 = 0 \end{cases}$$

Si tratta ora di analizzare questa dinamica (deterministica) e capire cosa succede per $n \to \infty$
[la parte di probabilità è finita]

$$F(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \mu(j)\, z^j \qquad z \in [0,1]$$

Bisogna capire come funziona f

Convengo $f(0) = \mathbb{P}(Z_1 = 0) = \mu(0) \in (0,1)$

altrimenti non succede nulla: o si estingue subito oppure mai (con certezza)

$$f(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(j) = 1$$

$0 \le f \le 1$

$$F'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(j)\, j\, z^{j-1} \ge 0$$

$$F''(z) = \sum_{j=2}^{\infty} \mu(j)\, j(j-1)\, z^{j-2} \ge 0$$

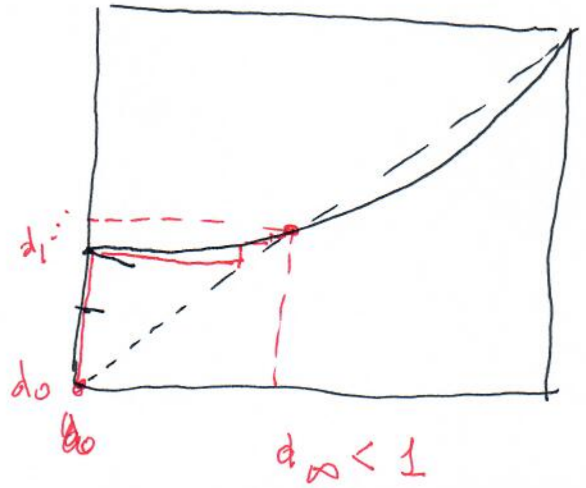
$f \nearrow$ e $f \cup$

$$\begin{cases} d_{n+1} = f(d_n) \\ d_0 = 0 \end{cases} \qquad f : [0,1] \to (0,1]$$

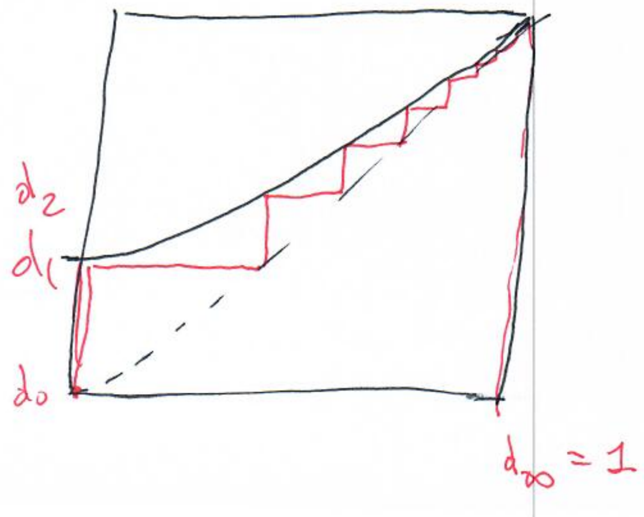
~~Ma~~ L'aspetto rilevante è quando $f(x) = x$

2 scenari:

(I)



(II)



• Nello scenario (II) f è "sopra" la bisettrice [ma $f(1)=1$]
mentre in (I) f ha un'altro punto fisso

Poiché f è convessa si può decidere quale capita guardando $f'(1)$

- se $f'(1) > 1$ f ha necessariamente un altro punto fisso
- se $f'(1) \leq 1$ f è sempre sopra la bisettrice

[le funzioni convesse sono sopra la ~~[illegible]~~ retta tangente]

Ora $$f'(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(j)\, j = \mathbb{E}(X_i^n) = \alpha$$

— o —

Dal punto di vista della probabilità di estinzione $\alpha < 1$ e $\alpha = 1$ paiono uguali, ma in effetti sono molto diversi

[Se $\alpha = 1$ $\quad \mathbb{E}(Z_n) = 1 \quad \forall n$]

T = tempo di estinzione $= \inf\{ n \geq 1 : Z_n = 0 \}$

Se $\alpha > 1$ T è una v.a peculiare

$\mathbb{P}(T = +\infty) > 0$ [siccome $T > 0$ non è veramente vietato, v.a a valori $\mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$]

Teo

$\alpha < 1 \qquad \mathbb{E}(T) < +\infty$

$\alpha = 1 \qquad \mathbb{E}(T) = +\infty$

"si estingue certamente, ma per farlo ci vuole un tempo infinito, in media"

dim (~~abbozzata~~ alcuni dettagli incompleti)

$T > 1 \iff z_1 > 0$

$T > 2 \iff z_2 > 0$

$\vdots$

quindi

$$\mathbb{P}(T > 1) = \mathbb{P}(z_1 > 0) = 1 - d_1$$

$$\mathbb{P}(T > 2) = \mathbb{P}(z_2 > 0) = 1 - d_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(z_n > 0) = 1 - d_n$$

$$\vdots$$

Un esercizio richiedeva (T v.a. positiva)

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - d_n)$$

dobbiamo capire se $d_n \to 1$ in modo sommabile oppure no

se n grande $d_n \approx 1$, sviluppo f

$$d_{n+1} = f(d_n) = f(1 - (1 - d_n))$$

$$\simeq \underbrace{f(1)}_{=1} - f'(1)(1 - d_n) + \frac{1}{2} f''(1)(1 - d_n)^2 + \dots$$

ovvero

$$1-d_{n+1} = F'(1)\,(1-d_n) - \frac{1}{2} F''(1)\,(1-d_n)^2 + \dots$$

- Se $\underbrace{F'(1)}_{\alpha} < 1$ posso trascurare $(1-d_n)^2$
  [illegible]

  e ricavo che $1-d_n$ converge a zero geometricamente

  $$(1-d_n) \sim \alpha^n$$

  $\Rightarrow \quad \mathbb{E}(T) < +\infty$

- Se invece $\alpha = F'(1) = 1$

  la parte lineare pareggia e $(1-d_n)^2$ è rilevante

  $$(1-d_{n+1}) - (1-d_n) = -\frac{1}{2} F''(1)\,(1-d_n)^2 + \dots$$

  questo mi dice che $1-d_n \sim \frac{1}{n}$ per n grandi

  infatti

  $$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \simeq -\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

  Ricavo

  $\mathbb{E}(T) = +\infty$ poiché $1-d_n$ non converge a zero in modo sommabile