CONVERGENZA DI VARIABILI ALEATORIE

Discusso questo problema in vari esempi

- legge dei grandi numeri $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$ $\quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

  (limite deterministico) convergenza in probabilità $\quad X_i$ iid

- Teorema di Poisson $\quad X_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$

  $$X_n \to Poisson(\lambda)$$

  $$\forall k \quad \mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(Z = k)$$

- Geometrica $\to$ Esponenziale

  $$\tau_n \sim Geom(\tfrac{\lambda}{n}) \qquad \frac{1}{n}\tau_n \to Exp(\lambda)$$

  $$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}(\tfrac{1}{n}\tau_n > t) \to \mathbb{P}(\underset{\substack{\sim \\ exp(\lambda)}}{T} > t)$$

- Teorema limite centrale

  X_i iid $\quad \mathbb{E}(X_i) = 0$, $\mathbb{V}(X_i) = 1$

  $$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \to \mathcal{N}(0,1)$$

  $$\mathbb{P}\Big(a < \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i < b\Big) \to \mathbb{P}(\overset{\sim \mathcal{N}(0,1)}{Z} \in (a,b))$$

Vorremmo una definizione "naturale" che includa tutti questi esempi. Anche uno altro, non aleatorio,

X_n successione in $\mathbb{R}$ (= v.a. certa)

$X_n \to X \in \mathbb{R}$ (= v.a. certa) come convergenza in $\mathbb{R}$

Tutti queste situazioni riguardano solo la distribuzione delle v.a., non ci interessa affatto lo spazio di probabilità dove sono realizzate.

- un tentativo

$$X_n \to X \quad \text{sse} \quad \forall\ (a,b) \subset \mathbb{R}$$

$$\lim_n \ \mathbb{P}(X_n \in (a,b)) = \mathbb{P}(X \in (a,b))$$

<u>non</u> va bene

$$X_n = \frac{1}{n} \qquad X_n \to 0 \quad (\text{come successione su } \mathbb{R})$$

ma $\quad \mathbb{P}(X_n \in (0,1)) = 1 \qquad \mathbb{P}(X \in (0,1)) = 0$

stesso problema se intervalli chiusi.

<u>DEF</u> [convergenza in legge di v.a.] o in distribuzione, o debole, o ...

X_n successione di v.a. (possibilmente su spazi di probabilità diversi)
X v.a.

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \quad \text{sse} \quad \forall\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \underline{\text{continua}} \text{ e } \underline{\text{limitata}}$$

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \longrightarrow \mathbb{E}(f(X))$$

- ~~Ob Oss~~. Con un po' di pazienza, tutto comprende tutto gli esempi dichiarati prima

- È una proprietà delle distribuzioni

<u>Oss</u> la convergenza in legge è "stabile" per applicazioni continue

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \qquad \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{continua}$$

$$\Rightarrow \quad \phi(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \phi(X)$$

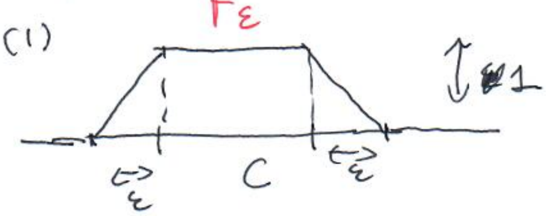
<u>Prop</u> $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

(1) $\forall$ C chiuso $\subset \mathbb{R}$ $\quad \overline{\lim_n} \ \mathbb{P}(X_n \in C) \le \mathbb{P}(X \in C)$

(2) $\forall$ A aperto $\subset \mathbb{R}$ $\quad \underline{\lim_n} \ \mathbb{P}(X_n \in A) \ge \mathbb{P}(X \in A)$

<u>dim</u>

(1)



$$\mathbb{P}(X_n \in C) \le \mathbb{E}(F_\varepsilon(X_n))$$

quindi

$$\overline{\lim_n} \ \mathbb{P}(X_n \in C) \le \mathbb{E}(F_\varepsilon(X_n))$$

ora $\varepsilon \downarrow 0$ e concludo

(1) $\Leftrightarrow$ (2) : basta passare al complementare

In effetti (1) [o (2)] è propio equivalente alla convergenza in legge [senza dimostrazione]

$$\forall\, C \text{ chiuso } \subset \mathbb{R} \quad \overline{\lim_n} \ \mathbb{P}(X_n \in C) \le \mathbb{P}(X \in C) \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

se $B \subset \mathbb{R}$

∂B = bordo di B := chiusura di $(B) \setminus$ interno (B)

<u>COR</u> Sia $X_n \xrightarrow{d} X$ e B t.c. $\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$

$$\lim_n \mathbb{P}(X_n \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

<u>OSS</u> La condizione su B riguarda solo la v.a. limite X, non la successione.

<u>dim</u> ovvia da ~~al~~ PROP.

<u>PROP</u>

richiede X_n e X definite sullo stesso spazio di probabilità

(1) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \implies X_n \xrightarrow{d} X$

(2) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff X_n \xrightarrow{d} X$
con X certa

<u>dim</u> era il contenuto di un esercizio.

MENDA V.A. CONTINUE

- La situazione è più complicata di quanto assunto finora. Non è vero che

$$\text{v.a.} < \begin{matrix}\text{continue} \\ \text{discrete}\end{matrix}$$

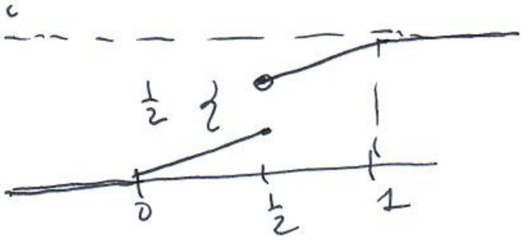
- Esempio: Tiro una moneta (equa)

  se Testa $\quad X = \frac{1}{2}$

  se Croce $\quad X \sim \text{UNIF}(0,1)$

X è un po' continua e un po' discreta.

La sua funzione di distribuzione $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ è così



Poco male, ma la situazione è effettivamente più complicata non è una questione di nomi

ESEMPIO: V.A. DI CANTOR, FUNZIONE DI CANTOR, SCALA DI CANTOR..

Tira una moneta equa ∞ volte ed usa i risultati per produrre le cifre dello sviluppo in base 3 senza cifre $= 1$

ovvero

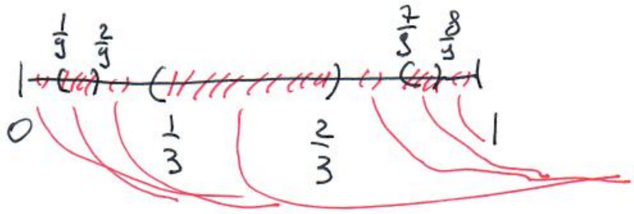
$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_1,\dots,\omega_n,\dots)\} \quad \text{con prob. prodotto di} \quad \mathbb{P}_0(0)=\mathbb{P}_0(1)=\frac{1}{2}$$

$X : \Omega \to [0,1]$ definita da

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i}\, 2\omega_i \qquad \begin{cases} = 0 & \text{se croce} \\ = 2 & \text{se testa} \end{cases}$$

evidentemente

$$\mathrm{Im}(X) = \{ x \in [0,1] \text{ t.c. nello sviluppo di } x \text{ in base } 3 \text{ non compare mai la cifra } 1 \}$$



X non può capitare qui

~~Im(X)~~ $[0,1] \setminus \mathrm{Im}(X) = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right) \cup \dots$

$\mathrm{Im}(X)$ ha la stessa cardinalità di $[0,1]$

(usate le cifre di X in base 3 per produrre le cifre dell in base 2)

X è una v.a. continua, ma la sua distribuzione non è esprimibile in termini di una densità

infatti

$$\text{lunghezza}\left(\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right) \cup \left(\tfrac{1}{9},\tfrac{2}{9}\right) \cup \left(\tfrac{7}{9},\tfrac{8}{9}\right) \cup \left(\tfrac{1}{27},\tfrac{2}{27}\right) \cup \dots \right)$$

$$= \frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{9} + 4\cdot\frac{1}{27} + \dots$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

- $F_X(x)$ = funzione di distribuzione di X

com'è fatta ?

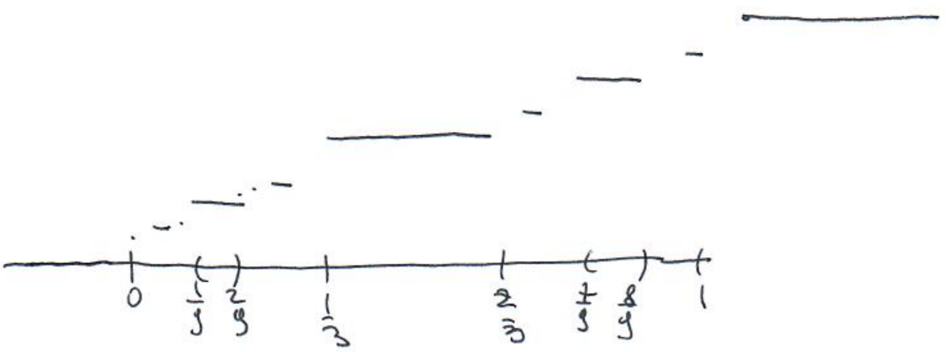
$x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ $\quad F_X(x) = \frac{1}{2}$

$x \in (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ $\quad F_X(x) = \frac{1}{4}$

$x \in (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ $\quad F_X(x) = 3/4$

$x \in (\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$ $\quad F_X(x) = \frac{1}{8}$

$\vdots$



Ex $\quad F_X$ è continua $\quad$ (limite uniforme di funzioni continue)

$F_X(0) = 0 \qquad F_X(1) = 1$

eppure

F_X è costante su un insieme di lunghezza 1

"scala di Cantor"

—o—

Mendo :

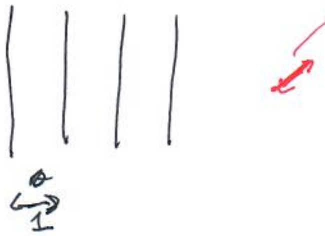
"v.a. continue" $\mapsto$ "v.a. assolutamente continue"

⇕

la distribuzione è descrivibile attraverso una densità

⊙ Ago di Buffon

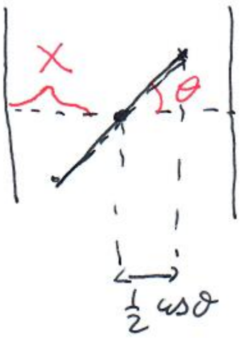
Pavimento a strisce "parquet"



Tirate a caso un ago della stessa lunghezza delle strisce

$\mathbb{P}(\text{ago interseca}) = ?$

Formalizziamo un po' meglio.
Cosa intendiamo tira un ago a caso?

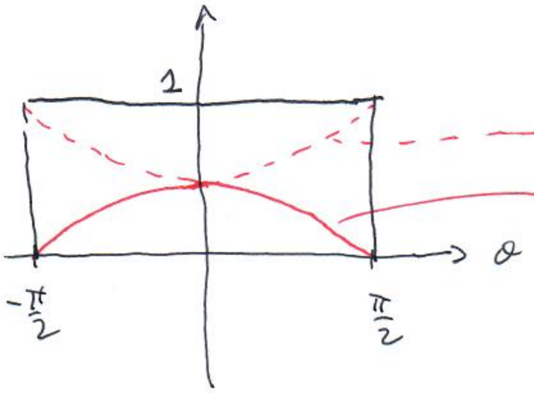


$X \sim \text{UNIF}(0,1)$

$\Theta \sim \text{UNIF}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

indipendenti

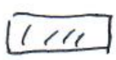
$$\mathbb{P}(\text{interseca}) = \mathbb{P}\left(\left\{X - \tfrac{1}{2}\cos\Theta < 0\right\} \cup \left\{X + \tfrac{1}{2}\cos\Theta > 1\right\}\right)$$



$(\Theta, X) \sim \text{UNIF}\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0,1)\right)$

$x = 1 - \frac{1}{2}\cos\theta$

$x = \frac{1}{2}\cos\theta$

$\mathbb{P}(\text{interseca}) = \dfrac{\text{Area}\left(\right.}{\text{Area}\left(\right.}$  

$$= \frac{2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos\theta \, d\theta}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi}$$

- Per quanto possa sembrare incredibile, nel '700 Buffon ha usato questo metodo per il calcolo numerico di π.

Ha tirato ~~il~~ l'ago un po' di volte e (usando la legge dei grandi numeri) ha poi valutato π dalla frequenza di successi.

.. probabilmente ha imbrogliato
(è venuto troppo bene per un metodo così rozzo)

ma è il primo montecarlo

bella storia!