• COSTRUZIONE DI UNA V.A. ARBITRARIA COME FUNZIONE DI UNIFORME

• Slogan: nel generatore di numeri casuali c'è abbastanza aleatorietà per produrre una qualunque v.a.

Sia $U \sim \mathrm{UNIF}(0,1)$ risultato del generatore di numeri casuali

e X v.a. arbitraria (discreta o continua) [a valori in $\mathbb{R}$]

$\exists\ \phi : (0,1) \to \mathbb{R}$ T.C.

$\phi(U) \sim X$ ($\phi(U)$ e X hanno la stessa distribuzione)

Esempi:

• $X \sim \mathrm{Bern}(p)$

basta $\phi : (0,1) \to \{0,1\}$

$$\phi(u) = \begin{cases} 0 & u \in (0, 1-p) \\ 1 & u \in [1-p, 1) \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\phi(U) = 0) = \mathbb{P}(U \in (0, 1-p)) = 1-p$$

$$\mathbb{P}(\phi(U) = 1) = \mathbb{P}(U \in [1-p, 1]) = p$$

- $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$X = \begin{cases} 0 & \text{prob } e^{-\lambda} \\ 1 & \text{"} \quad e^{-\lambda}\lambda \\ \vdots & \\ k & \text{"} \quad e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ \vdots & \end{cases}$$

basta $\phi : (0,1) \to \mathbb{Z}_+$ ~~tale~~

$$\phi(u) = \begin{cases} 0 & u \in (0, e^{-\lambda}) \\ 1 & u \in [e^{-\lambda}, e^{-\lambda}(1+\lambda)) \\ 2 & u \in [e^{-\lambda}(1+\lambda), e^{-\lambda}(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2})) \\ \vdots & \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\phi(U) = k) = \mathbb{P}\left(U \in \left[e^{-\lambda}\left(1+\dots+\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right), e^{-\lambda}\left(1+\dots+\frac{\lambda^k}{k!}\right)\right)\right)$$

- è abbastanza chiaro che funziona anche se X è v.a. continua

⊙ Funzione di Distribuzione

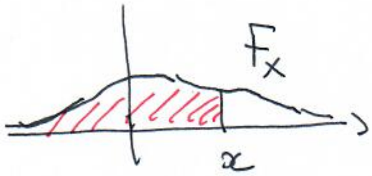
Sia X v.a. (discreta o continua) a valori $\mathbb{R}$

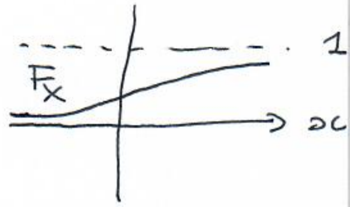
$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ funzione di distribuzione

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$$

$F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$, $F_X \nearrow$

• Se X è v.a. continua con densità f_X





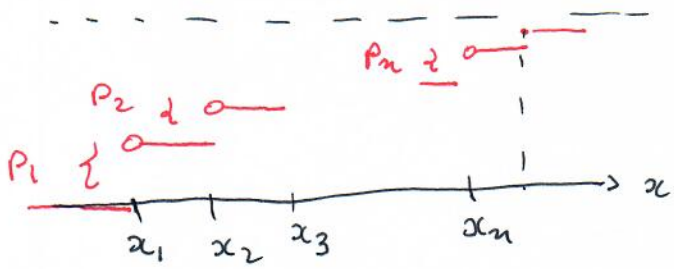
evidentemente

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$

sicché $\quad F_X' = f_X$

• Se X è v.a. discreta

$Im(X) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ con prob. $p_1, \dots, p_n, \dots$



F_X costante a tratti e continua da destra

F_X salta su $Im(X)$ e il salto in x è la prob. di $X = x$

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \le x) - \mathbb{P}(X < x)$$

$$= F_X(x) - F_X(x-)$$ ← limite da sinistra

<u>In ogni caso</u>:

F_X caratterizza la distribuzione della v.a. X

TEO Sia X v.a. con funzione di distribuzione F_X e $U \sim UNIF(0,1)$.

$$F_X^{-1}(U) \sim X$$

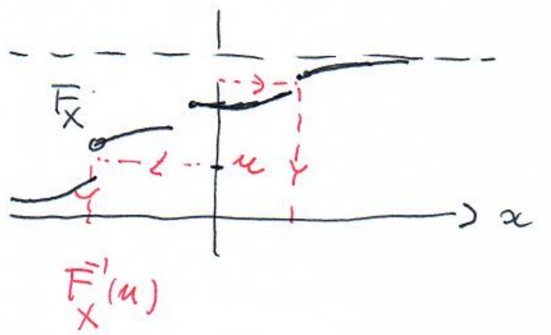
$F_X^{-1}(U)$ e X hanno la stessa distribuzione

Cos'è F_X^{-1}? se X è v.a. continua e $f_X > 0$ allora $F_X \uparrow$ strettamente e F_X^{-1} è proprio l'inversa

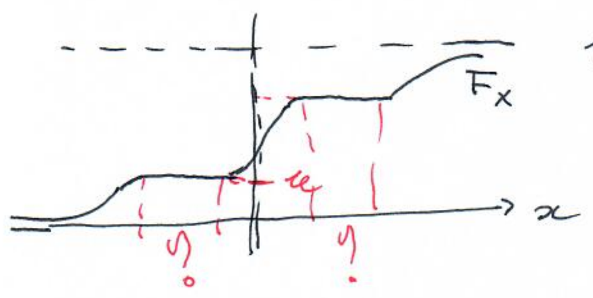
- Due cose possono andare ~~...~~ potenzialmente male

F_X ha salti e/o F_X ha intervalli in cui è costante

i salti non pongono nessun problema:



sulle parti piatte c'è un'ambiguità



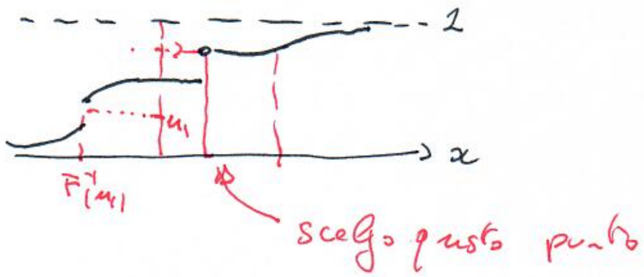
$F_X^{-1}(\{u\})$ è un intervallo per u corrispondente alle parti piatte

come decido F_X^{-1}?

Non importa: se $U \sim UNIF((0,1))$ non conta e u t.c. $F_X(x) = u$ per $x \in [a,b)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(U = u) = 0$

Esercizio. Scelta canonica: punto più a sinistra



Scrivere una formula per F_X^{-1} con sup, inf

"inversa generalizzata"

dim

Poiché funzione di distribuzione caratterizza la ~~v.a.~~ distribuzione di una v.a. basta verificare che

$$\mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \le x) = F_X(x)$$

$$\|$$

$$\mathbb{P}(U \le F_X(x)) = F_X(x)$$

- Slogan 2. In una moneta equa c'è abbastanza aleatorietà per produrre una v.a. qualunque

Data una moneta equa basta produrre $U \sim UNIF(0,1)$ lanciate la moneta (infinite volte) e usate i risultati per produrre lo sviluppo in base 2 di U

Esercizio

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_1, \dots, \omega_n, \dots)\}$ con prob. prodotto

di $\mathbb{P}_0(\{0\}) = \mathbb{P}_0(\{1\}) = \frac{1}{2}$

Sia

$U : \Omega \to [0,1]$ definita da

$$U(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \omega_i \quad \Rightarrow \quad U \sim \text{UNIF}([0,1])$$

infatti

$$\mathbb{P}(U \leq \tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(\{\omega : \omega_1 = 0\}) = \tfrac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(U \leq \tfrac{1}{4}) = \mathbb{P}(\{\omega : \omega_1 = \omega_2 = 0\}) = 1/4$$

$\vdots$

$$\mathbb{P}(U \leq \tfrac{k}{2^n}) = \mathbb{P}(\{\omega : \dots\}) = \frac{k}{2^n} \qquad k = 1, \dots, 2^n$$

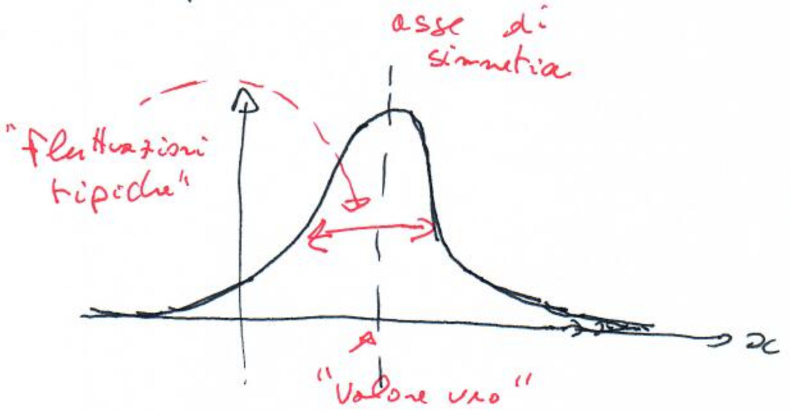
e questo identifica la funzione di distribuzione.

12. VARIABILE ALEATORIA GAUSSIANA

Motivazione. Teoria degli errori nelle misure di quantità osservabili fisici (intensità di corrente elettrica attraverso una resistenza tenuta ad una data differenza di potenziale)

Se ripeto la misura tante volte non verrà sempre lo stesso risultato per "errori casuali"

La distribuzione della quantità (reale) misurata avrà la forma



① fatto sperimentale
ma anche
② fondati motivi matematici sulla base di un modello per gli "errori casuali"
[vedremo in seguito]

X v.a. continua

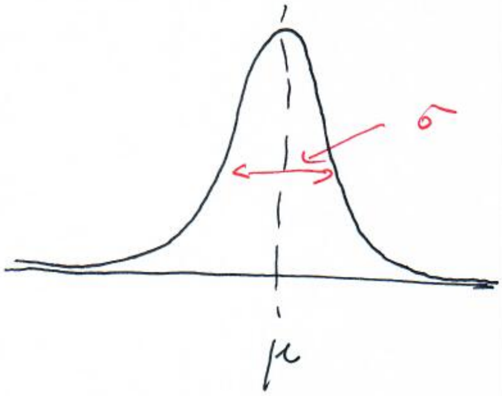
2 parametri

- μ valore "teorico"
- σ fluttuazione tipica

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ v.a. Gaussiana o Normale

se X ha densità

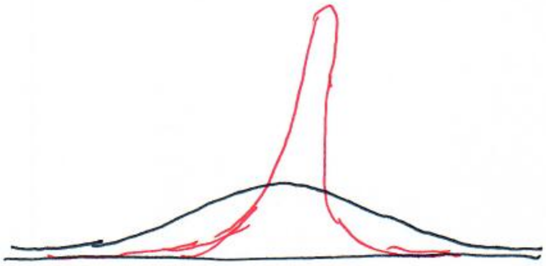
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$



Se X si misura in metri
μ " " " metri
σ^2 " " " metri^2

Se cambio μ $\leadsto$ traslazione di f_X

Se cambio σ^2 $\leadsto$ f_X è più o meno concentrata intorno alla media



— σ^2 "grande"

— σ^2 "piccolo"

• Vediamo che è una densità $\quad f_X > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\,dx$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad dz = \frac{dx}{\sigma} \qquad\qquad \sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz \underset{\uparrow}{=} 1$$

Calcolo di Gauss
(servono integrali in due variabili)

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\mathbb{E}(X) = \mu \qquad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

- infatti

$\mathbb{E}(X) = \mu$ per simmetria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = 0$$

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx =$$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

per omogeneità $\mathbb{V}(X) \propto \sigma^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{z^2}_{z \cdot z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot \frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\right) dz$$

per parti

$$= \underbrace{-z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1$$

per normalizzazione di Gauss

• Standardizzazione v.a. gaussiana

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\qquad Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

V.A. GAUSSIANA STANDARD

infatti

$$\mathbb{P}(Z \in [z, z+\Delta z]) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \in [z, z+\Delta z]\right)$$

$$= \mathbb{P}(X \in [\mu + \sigma z, \mu + \sigma z + \sigma \Delta z])$$

$$= f_X(\mu + \sigma z) \cdot \sigma \Delta z = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\overset{+\mu+\sigma z}{x} - \mu)^2}{\sigma^2}} \sigma \Delta z$$

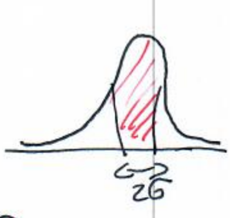
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Delta z$$

Permette di ricondurre il calcolo delle probabilità per $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ al caso $\mathcal{N}(0,1)$.

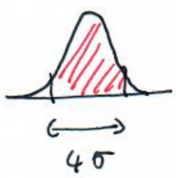
La primitiva di $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ non si calcola esplicitamente in termini di funzioni note, ma è conosciuta (numericamente) nel modo più completo possibile (tavole dell'integrale gaussiano)

Valori notevoli

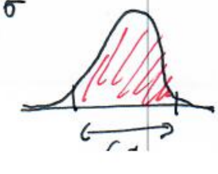
$\mathbb{P}(-1 < Z < 1) = \mathbb{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \simeq 66\%$



$\mathbb{P}(-2 < Z < 2) = \mathbb{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \simeq 95\%$



$\mathbb{P}(-3 < Z < 3) = \mathbb{P}(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \simeq 99.7$

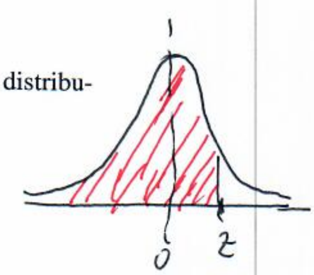


15

Tavola della distribuzione normale

La tavola seguente riporta i valori della funzione di ripartizione $\Phi(z)$ della distribuzione normale standard $N(0,1)$, per $0 \leq z \leq 3.5$. Ricordiamo che

$$\Phi(z) := \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx. \quad =$$

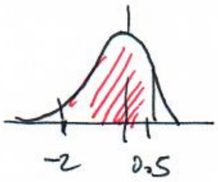


I valori di $\Phi(z)$ per $z < 0$ possono essere ricavati grazie alla formula

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z).$$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

∘ Esercizio

$\mathbb{P}(-2 < Z < 0.5) = \text{Area}\Big($  $\Big)$

$= \Phi(0.5) - \underbrace{\Phi(-2)}_{\substack{\| \\ 1 - \Phi(2)}}$ ~~[illegible]~~ [illegible]

$= \phi(0.5) + \phi(2) - 1 \simeq 0.69 + 0.98 - 1 \simeq 0.67$

• $X \sim \mathcal{N}(-1, 4)$ $\qquad Z = \dfrac{X - \mu}{\sqrt{4}} = \dfrac{X+1}{2} \qquad X = -1 + 2Z$

$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(-1 + 2Z > 0)$

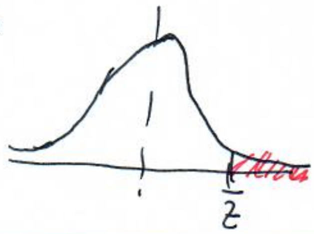
$= \mathbb{P}\left(Z > -\frac{1}{2}\right) = \text{Area}\Big($  $\Big)$

$= 1 - \phi(0.5) \cong 1 - 0.69 \simeq 0.31$

∘ $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ Determinare $\bar{z}$ (minimo) t.c.

$$\mathbb{P}(Z > \bar{z}) \leq 5\%$$

Voglio

Area() $\leq 5\%$

$\|$

$1 - \phi(\bar{z})$

$1 - \phi(\bar{z}) \leq 0.05 \iff \phi(\bar{z}) \geq 0.95$

$\overset{\sim}{\iff} \quad \bar{z} \geq 1.66$