⓪ Passeggiata aleatoria su $\mathbb{Z}$: calcolo probabilità di primo ritorno in 0

S_n, $n \geq 0$ passeggiata aleatoria semplice simmetrica su $\mathbb{Z}$ ($d=1$)

$S_0 = 0$

$$S_{n+1} = S_n + \begin{cases} +1 & \text{prob } 1/2 \\ -1 & \text{prob } 1/2 \end{cases}$$

$$u_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$F_{2n} = \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{il primo ritorno} \\ \text{in 0 è al tempo } 2n\end{array}\right)$$

quando capita il primo ritorno 0?

~~$\mathbb{P}$(il primo ritorno in 0 è dopo il tempo $2n$) $= \sum_{k=n+1}^{\infty} F_{2k} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ per ricorrenza pass. aleat. $d=1$~~

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{fino al tempo } 2n-1 \\ \text{non è mai tornato in 0}\end{array}\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{primo ritorno in 0} \\ \text{prima del tempo } 2n\end{array}\right)$$

(poichè $\sum_{k=1}^{\infty} F_{2k} = 1$)

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} F_{2k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ per ricorrenza. Quanto velocemente?

Una possibile intuizione è che sia molto difficile (siamo in $d=1$) ~~tra~~ evitare di tornare in 0 e quindi $\to 0$ velocemente. ~~è~~ Lo stesso che dire che $f_{2n} \to 0$ veloce.

In effetti <u>non</u> è così: con probabilità piccola ($\to 0$ per $n \to \infty$) ma non tanto piccola ($\to 0$ piano) si può evitare di tornare in 0 fino al tempo $2n$.

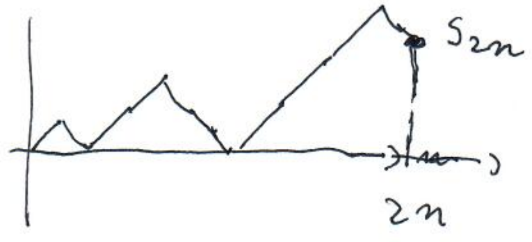
<u>Scopo</u>: calcolare f_{2n} esplicitamente
[funzionerà perché siamo in $d=1$]

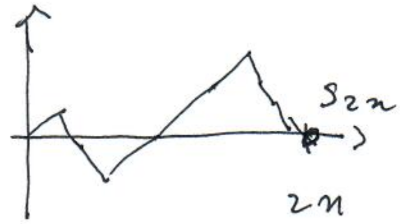
<u>Lemma</u> $\forall\, n \geq 1$

$$\mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = u_{2n}$$

ovvero

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{sempre positivo} \\ \text{fino a } 2n\end{array}\right) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{essere in } 0 \\ \text{al tempo } 2n\end{array}\right)$$





ci sono tante traiettorie che fanno così ~~tante~~ quante quelle che fanno così dim

Dipende solo dai primi $2n$ passi. Poiché la pass. aleat. è simmetrica ho la probabi. uniforme.

$|\Omega| = 2^{2n}$

ci sono 2^{2n} traiettorie e ognuna ha prob. $\frac{1}{2^{2n}}$.

Basta stabilire una corrispondenza biunivoca tra i due eventi

Sia $\omega \in \{ S_{2n} = 0 \}$

gli associo $\omega' \in \{ S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0 \}$

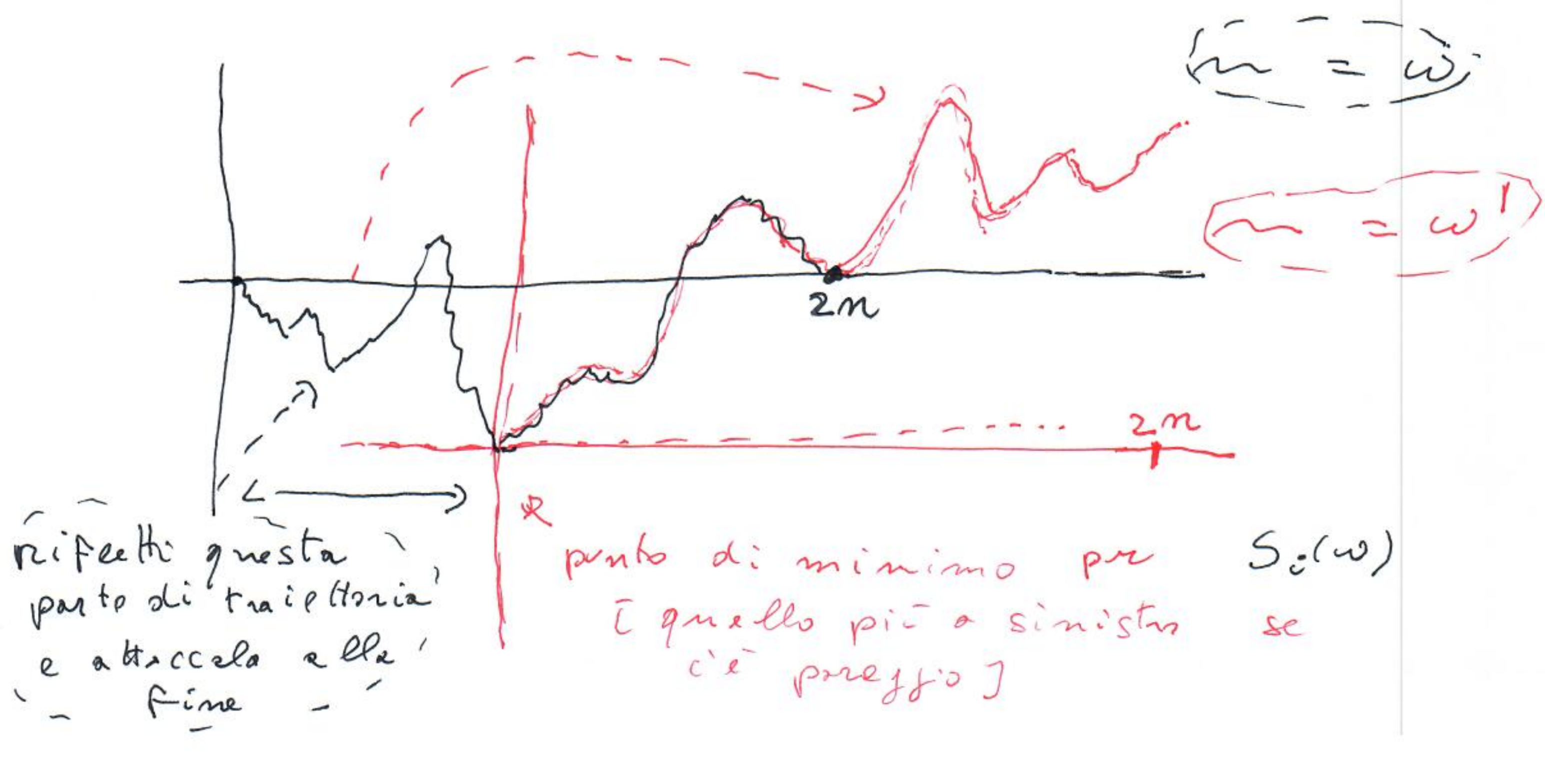
come segue

se $S_i(\omega)$ $i = 1, \dots, 2n$ è sempre positivo

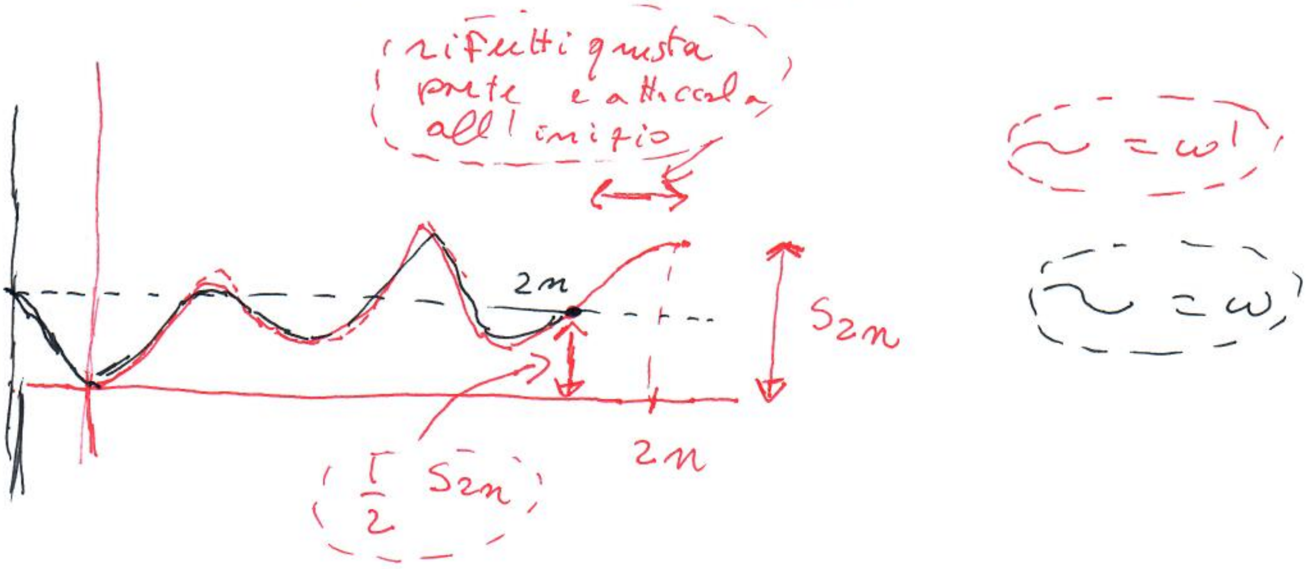
$\Rightarrow \omega' = \omega$

[gli eventi elementari nell'intersezione tra i due eventi non li tocco]

Se invece $S_i(\omega)$ $i = 1, \dots, 2n$ diventa negativo dichiaro ω' come in figura



L'applicazione $\omega \mapsto \omega'$ è evidentemente iniettiva. Invece di ~~verifica~~ dimostrare che è suriettiva vediamo chi è l'applicazione inversa.



$$\begin{array}{l} \omega \mapsto \omega' \\ \omega' \mapsto \omega \end{array} \quad \text{sono iniettive} \quad \Rightarrow \quad \text{gli eventi hanno la stessa cardinalità}$$

$\square$

Due corollari del lemma (in effetti sono enunciati equivalenti)

<u>Cor 1</u>

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

<u>dim</u> Condiziono al primo passo

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) = \mathbb{P}(S_1 = 1)\, \mathbb{P}(S_2 > 0, S_3 > 0, \dots, S_{2n} > 0 \mid S_1 = 1)$$

$$= \frac{1}{2}\, \mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} \geq 0)$$

non c'era, ma lo posso aggiungere gratis poiché $S_{..} \geq 0 \Rightarrow S_{..} \geq \dots$

COR 2

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

dim

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0)$$

$$= \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) + \mathbb{P}(S_1 < 0, \dots, S_{2n} < 0)$$

e uso cor 2 con il suo simmetrico

[$-S_i$ è pass. aleat. tanto quanto S_i]

Prop $n \geq 1$

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$$

ovvero

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{primo ritorno al tempo} \\ 2n\end{array}\right) = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0)$$

$$= \mathbb{P}(S_{2n-2} = 0) - \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

oss evidentemente $u_{2n} \searrow$

e f_{2n} è [meno] l'incremento di u_{2n}

.. più facile di così!

[è speciale di $d = 1$]

dim Per cor 2,

$$f_{2n} = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0)$$

$$= \mathbb{P}(\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0\} \setminus \{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} \neq 0\})$$

$$= \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, \underbrace{S_{2n-1} \neq 0}_{\text{lo posso omettere}}) - \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0)$$

$$= \mathbb{P}(S_{2n-2} = 0) - \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

Ora è immediato fare il calcolo esplicito

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n} = u_{2n}\left[\frac{u_{2n-2}}{u_{2n}} - 1\right]$$

$$= u_{2n}\left[\frac{\frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1}}{\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}} - 1\right]$$

$$= u_{2n}\left[4\,\frac{\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} - 1\right] = u_{2n}\left[4\,\frac{n^2}{2n(2n-1)} - 1\right]$$

$$= u_{2n}\left[\frac{2n}{2n-1} - 1\right] = u_{2n}\,\frac{1}{2n-1}$$

In particolare

$$f_{2n} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{n^{3/2}}$$

è sommabile (doveva succedere per forza) ma non di tanto

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{Fino al temo } n-1\\ \text{non è tornato in } 0\end{array}\right) \sim \frac{c}{\sqrt{n}}$$

<u>OSS</u> Dimostrazione [alternativa] ricorrenza passeggiata aleatoria in $d = 1$

$$\text{ricorrente} \iff \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = 1$$

è una serie telescopica:

$$f_2 + f_4 + \cdots = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{u_0} - u_2 + u_2 - u_4 + \cdots = u_0 = 1$$

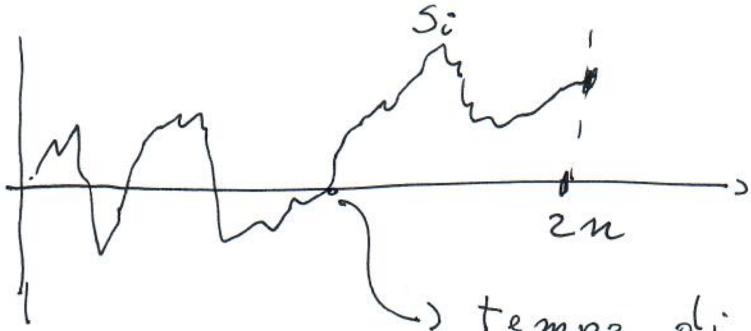
<u>Domanda</u> sulla <u>serie</u>: devo sapere qualcosa delle u_{2n} o è vero comunque?

⑥ Legge dell'arcoseno

S_i, $i = 0, \dots, 2n$ pass. aleatoria su $\mathbb{Z}$

[ora il numero totale dei passi è fissato $= 2n$]

$n \geq 1$ fisso



$\to$ tempo di ultimo ritorno in 0

[se non ritorna mai in 0 è pari a 0 $(S_0 = 0)$]

$$\alpha_{2k, 2n} = \mathbb{P}\left(\begin{array}{l} \text{l'ultimo ritorno in } 0 \\ \text{capita al tempo } 2k \end{array} \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0 \right)$$

$k = 0, \dots, n$

Bizzarrie passeggiata aleatoria: (non proprio intuitivi)

- è simmetrica rispetto a n [tempo a $1/2$]

$$\alpha_{2k, 2n} = \alpha_{2n-2k, 2n}$$

- i valori $k \approx n$ sono i meno probabili
i più probabili sono invece i valori agli estremi
$k \approx 0$ e $k \approx n$

TEO (legge arcoseno per pass. aleat. su $\mathbb{Z}$)

$$\alpha_{2k,2n} = u_{2k}\, u_{2n-2k} \qquad k=0,\dots,n$$

ovvero

$$\mathbb{P}\left(\begin{matrix}\text{ultimo ritorno al tempo}\\ 2k\end{matrix}\right) = \mathbb{P}(S_{2k}=0)\ \mathbb{P}(S_{2(n-k)}=0)$$

<u>OSS</u> per $k=0$ dice

$$\mathbb{P}(S_1\neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n}\neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n}=0)$$

ovvero Cor 2

<u>dim</u>

Per $k>0$ si tratta di usare ancora Cor 2 ma nell'intervallo di tempo $[2k, 2n]$

per non sbagliare la normalizzazione calcolo la cardinalità degli eventi

è come far partire (da 0) un nuovo passeggiatore ($\tilde{S}$) al tempo $2k$

$$\left|\left\{ \underbrace{S_{2k}=0}_{\text{riguarda i passi fino a } 2k},\ S_{2k+1}\neq 0, \dots, S_{2n}\neq 0 \right\}\right|$$

$$= \left|\{S_{2k}=0\}\right| \cdot \left|\{\tilde{S}_1\neq 0,\dots,\tilde{S}_{2n-2k}\neq 0\}\right|$$

$$= 2^{2k}\,\mathbb{P}(S_{2k}=0)\cdot 2^{2(n-k)}\,\mathbb{P}(\tilde{S}_1\neq 0,\dots,\tilde{S}_{2n-2k}\neq 0)$$

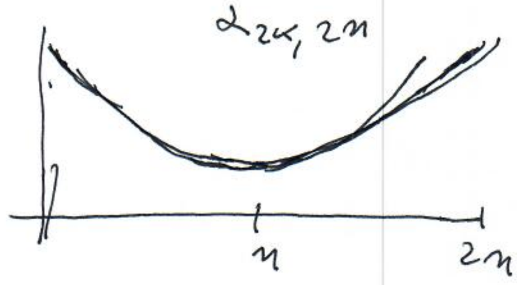
$$\overset{\text{Cor 2}}{=} 2^{2n}\,\mathbb{P}(S_{2k}=0)\cdot \mathbb{P}(\tilde{S}_{2n-2k}=0)$$

$$= 2^{2n}\, u_{2k}\, u_{2n-2k}$$

Mostro che $k \approx n$ è meno probabile di $k \approx 0$ o $k \approx 2n$

Via Stirling $u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{2k,2n} \sim \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}}$$



Perchè si chiama legge dell'arcoseno?

Fissa $x \in (0,1)$

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{ultimo passaggio per } 0\\ \text{prima del tempo } x\,2n\end{array}\right)$$

$$= \sum_{k \leq nx} \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{ultimo passaggio per } 0\\ \text{al tempo } 2k\end{array}\right)$$

$$= \sum_{k \leq nx} \alpha_{2k,2n}$$

se $n \to \infty$ sempre via Stirling

$$\approx \sum_{k \leq nx} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

$$= \sum_{k \leq nx} \frac{1}{n} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}} \approx \int_0^x \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}\, dy$$

$$= \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$$

Esercizio di integrali