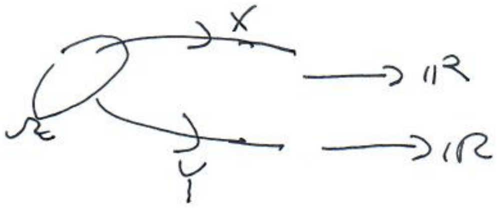
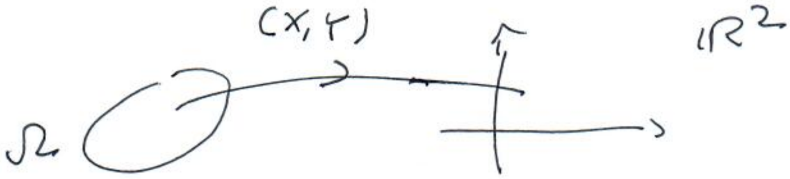
9. Distribuzione congiunta di v.a. e valore di attesa condizionato

Finora: una v.a. alla volta. Se X e Y due v.a.



Ora: riguardiamo $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



Esempio $\Omega = \{1,\dots,6\}$ $\mathbb{P}$ uniforme "lancio di dado equo"

$$X = \begin{cases} -1 & \omega = 1,2 \\ 0 & \omega = 3,4 \\ 1 & \omega = 5,6 \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} -2 & \omega = 1,2,3 \\ 2 & \omega = 4,5,6 \end{cases}$$

Se ci interessano solo le scommesse X e Y

Y \ X	-1	0	1	
-2	2/6	1/6	0	3/6
2	0	1/6	2/6	3/6
	2/6	2/6	2/6	

Distribuzione congiunta

(qui leggo la distribuzione di Y)

qui leggo la distribuzione di X

In generale

Distribuzione congiunta di v.a.

$(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ v.a.

distribuzione congiunta di X e Y è la prob. su $Im(X,Y) \subset Im(X) \times Im(Y)$ definita da

$$\mu_{X,Y}(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in B\})$$

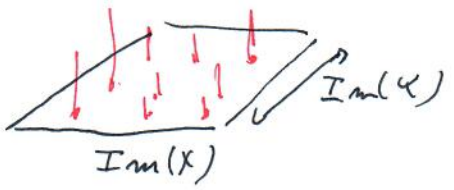
$$= \mathbb{P}((X,Y)^{-1}(B))$$

sui singoletti

$$\mu_{X,Y}(\{(x,y)\}) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

che rappresentiamo come tabellina

o ~~[illegible]~~ istogramma



La distribuzione congiunta mi porta tutte le informazioni su (X,Y). In particolare, ~~[illegible]~~ posso ricavare le distribuzioni di X e Y dalla loro distribuzione congiunta.

<u>distribuzioni marginali</u> di X e Y

$$\mu_X(\{x\}) = \sum_{y \in Im(Y)} \mu_{X,Y}(\{(x,y)\})$$

$$\mu_Y(\{y\}) = \sum_{x \in Im(X)} \mu_{X,Y}(\{(x,y)\})$$

ovvero

$$\mathbb{P}(X=x) = \sum_y \mathbb{P}(X=x, Y=y) \quad , \quad \mathbb{P}(Y=y) = \sum_x \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

le trovo sommando le righe (o colonne) della distribuzione congiunta

<u>OSS</u> Possiamo riformulare l'indipendenza di v.a. in questo linguaggio:

X e Y indip sse $\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y)$ $\forall x \in Im(X)$ $\forall y \in Im(Y)$

ovvero

X e Y sono v.a. indipendenti sse la distribuzione congiunta è il prodotto delle marginali

$$\mu_{X,Y}(\{(x,y)\}) = \mu_X(\{x\})\,\mu_Y(\{y\}) \qquad \forall x \in Im(X), y \in Im(Y)$$

$$\underbrace{\mu_{X,Y}}_{\text{probabilità su } Im(X)\times Im(Y)} = \mu_X \underbrace{\times}_{\text{probabilità prodotto su } Im(X)\times Im(Y)} \mu_Y$$

prob. su $Im(X)$

prob su $Im(Y)$

- Distribuzioni condizionate

Esempio. Dado equo A scommette X B scommette Y

B non conosce il risultato del dado, ma A gli comunica com'è andata a finire la sua scommessa. B deve riaggiornare il pronostico sulla sua scommessa

$\mathbb{P}(B \text{ vince} \mid A \text{ vince})$ $\mathbb{P}(B \text{ vince} \mid A \text{ perde}$ ....

ad esempio

$$\mathbb{P}(Y = -2 \mid X = 0) = \mathbb{P}(\omega = 1,2,3 \mid \omega = 3,4) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(Y = -2 \mid X = -1) = \mathbb{P}(\omega = 1,2,3 \mid \omega = 1,2) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(Y = -2 \mid X = 1) = \mathbb{P}(\omega = 1,2,3 \mid \omega = 5,6) = 0$$

In generale

Dato $y \in \mathrm{Im}(Y)$ $\quad p_{X|Y}(x|y)$

"distribuzione di X condizionata a $Y = y$"

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}((x,y))}{p_Y(y)} = \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$$

analogamente

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}((x,y))}{p_X(x)} = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x)$$

⊙ V.A. MULTINOMIALE

Schema a prove ripetute (= probabilità prodotto) ma il singolo esperimento non binario ma un numero finito di possibili risultati

"n lanci di un dado truccato con k facce"

$\Omega = \{1, 2, \dots, k\}^n$ ~~che~~ $\mathbb{P}$ probabilità prodotto

con $\mathbb{P}_0(\{1\}) = p_1$, $\mathbb{P}_0(\{2\}) = p_2$, $\dots$, $\mathbb{P}_0(\{k\}) = p_k$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \qquad p_i \geq 0$$

$X_1 = \# 1 \quad \dots \quad X_k = \# k$

$X = (X_1, X_2, \dots, X_k) \; : \; \Omega \to \mathbb{R}^k$

v.a multinomiale

$X \sim \text{Multinomiale}(n; p_1, \dots, p_k)$

[in effetti è vettore aleatorio (a valori $\mathbb{R}^k$)]

Per concretezza: $k = 3$

vincolo $X_1 + X_2 + X_3 = n$

<u>distribuzione congiunta</u>:

$$\mathbb{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = n_3) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$$

$n_1 + n_2 + n_3 = n$

distribuzione marginale di X_1

Ai fini di X_1 è come una moneta:
n lanci e prob. successo $= p_1$

$$X_1 \sim Bin(n, p_1)$$

Verifichiamo

$$\mathbb{P}(X_1 = n_1) = \sum_{n_2, n_3} \mathbb{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = n_3)$$

vincolo
$n_1 + n_2 + n_3 = n$

$$= \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \mathbb{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \underbrace{X_3 = n - n_1 - n_2}_{\text{forza } n_2 \leq n - n_1})$$

$$= \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, (n-n_1-n_2)!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n-n_1-n_2}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\, (n-n_1)!} p_1^{n_1} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \underbrace{\boxed{\frac{(n-n_1)!}{n_2!\, (n-n_1-n_2)!}}}_{= \binom{n-n_1}{n_2}} p_2^{n_2} p_3^{n-n_1-n_2}$$

$$= \binom{n}{n_1} p_1^{n_1} (\underbrace{p_2 + p_3}_{= 1 - p_1})^{n-n_1}$$

evidentemente

$$X_2 \sim Bin(n, p_2) \qquad X_3 \sim Bin(n, p_3)$$

- distribuzione di X_1 condizionata a X_2

$$\mathbb{P}(X_1 = n_1 \mid X_2 = n_2) = ?$$

cosa succederà? $\# 2 = n_2$ fissato

$$n_1 = 0, \dots, n - n_2$$

1 combatte solo contro 3 — su singolo lancio

sarà rivelato $\mathbb{P}_0(\{1\} \mid \{1, 3\}) = \dfrac{p_1}{p_1 + p_3}$

verrà:
$$\mathrm{Bin}\left(n - n_2, \frac{p_1}{p_1 + p_3}\right)$$

Verifichiamo:

$$\mathbb{P}(X_1 = n_1 \mid X_2 = n_2) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = \overbrace{n - n_1 - n_2}^{= n_3})}{\mathbb{P}(X_2 = n_2)}$$

$$= \frac{\dfrac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}\, p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}}{\dfrac{n!}{n_2!\,(n-n_2)!}\, p_2^{n_2} (p_1 + p_3)^{n - n_2}}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{(n-n_2)!}{n_1!\,(n - n_1 - n_2)!}}}_{= \binom{n-n_2}{n_1}} \left(\frac{p_1}{p_1 + p_3}\right)^{n_1} \left(\frac{p_3}{p_1 + p_3}\right)^{n - n_1 - n_2}$$

p_2 è sparito! è giusto così: ho detto esattamente quanti 2 ci sono stati

VALORE DI ATTESA CONDIZIONATO

Esempio: dado equo. A scommette X, B scommette Y

B conosce il risultato di A ma non l'evento elementare.

Ha ~~ag~~ aggiornato il suo pronostico con

$\mu_{Y|X}$: Distribuzione di Y condizionata a X

Ora aggiorna anche il valore di attesa della sua vincita con le informazioni che ha appreso da A

~~$\mathbb{P}(Y=-2 \mid X=-1) =$~~

$Y \backslash X$	-1	0	1	
-2	$2/6$	$1/6$	0	$3/6$
2	0	$1/6$	$2/6$	$3/6$
	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	

se $X=-1$ $\qquad \mathbb{P}(Y=-2 \mid X=-1) = 1 \qquad \mathbb{P}(Y=2 \mid X=-1) = 0$

se $X=0$ $\qquad \mathbb{P}(Y=-2 \mid X=0) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(Y=2 \mid X=0) = \frac{1}{2}$

se $X=1$ $\qquad \mathbb{P}(Y=-2 \mid X=1) = 0 \qquad \mathbb{P}(Y=2 \mid X=1) = 1$

quindi

$$\mathbb{E}(Y \mid X=-1) = -2 \cdot 1 + 0 = -2$$

$$\mathbb{E}(Y \mid X=0) = -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\mathbb{E}(Y \mid X=1) = 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

<u>In generale</u>. X e Y v.A.

$\mathbb{E}(Y|X)$ è una v.a. (<u>non</u> è un numero)

Fatta così: se $X = x \Rightarrow \mathbb{E}(Y|X=x)$ è il valore di attesa di Y rispetto a ~~$\mu_{X|Y}(x|y)$~~ $\mu_{Y|X}(\cdot|x)$

ovvero

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \sum_{y} y \; \mathbb{P}(Y=y \mid X=x)$$

$$\mathbb{E}(Y|X)(\omega) = \sum_{x \in Im(X)} \mathbb{1}_{\{\tilde{\omega}:\, X(\tilde{\omega})=x\}}(\omega) \; \underbrace{\mathbb{E}(Y|X=x)}_{\{\forall x \in Im(X) \text{ è un numero reale}\}}$$

ovvero

$$\mathbb{E}(Y|X) = \sum_{x \in Im(X)} \mathbb{1}_{\{X=x\}} \; \mathbb{E}(Y|X=x)$$

<u>OSS 1</u> $\mathbb{E}(Y|X)$ è una v.a. cosa succede se faccio $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$?

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \sum_{x \in Im(X)} \mathbb{P}(X=x) \sum_{y \in Im(Y)} y \; \mathbb{P}(Y=y \mid X=x)$$

$$= \sum_{y \in Im(Y)} y \underbrace{\sum_{x \in Im(X)} \mathbb{P}(X=x, Y=y)}_{= \mathbb{P}(Y=y)}$$

$$= \sum_{y \in Im(Y)} y \; \mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{E}(Y)$$

cos'altro poteva venire ?

OSS 2

se X, Y v.a. indip $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(Y|X) = ?$

dovrà venire $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$

sapere X non cambia di punto i miei pronostici per Y
(sono indipendenti)

Verifico

se X, Y indip $\mathbb{P}(Y=y \mid X=x) = \mathbb{P}(Y=y)$

[eventi indipendenti sse probab = probab. condizionata]

quindi ~~$\mathbb{E}(Y|X=x)$~~ $\mathbb{E}(Y|X=x) = \mathbb{E}(Y)$ <u>non</u> dipende da x

$\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$ v.a. certa