interpretazione da impiegato delle poste

$X = \#$ clienti per ritirare un pacco $\sim Poisson(\lambda_1)$

$Y = \#$ " " fare una raccomandata $\sim Poisson(\lambda_2)$

$X+Y = \#$ totale di clienti $\sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$

Situazione complementare

Z ~~X~~ $= \#$ clienti

arrivo al centro di smistamento:
qualcuno ritira un pacco, altri fanno una raccomandata

ipotesi: ogni cliente sceglie - l'uno indipendentemente dall'altro - pacco con prob. p e raccomandata con probabilità $1-p$

$X = \#$ clienti per pacchi $\quad Y = \#$ clienti per raccomandate

$X \sim ?\quad Y \sim ?$

Altrimenti: ogni cliente viene dipinto di rosso o nero con probabilità p e $1-p$.

evidentemente succederà

$$X \sim Poisson(p\lambda) \qquad Y \sim Poisson((1-p)\lambda)$$

infatti [l'esercizio era lo stesso calcolo]

(probab. totali) forza $n \geq k$

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=\cancel{0}\,k}^{\infty} \mathbb{P}(Z=n)\,\mathbb{P}(X=k \mid Z=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \dots = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

Vincita media in un gioco equo

- Gioco equo: per semplicità roulette R/N ma non c'è 0. Così

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(N) = 1/2$$

Si tratta di stabilire una strategia di gioco su tante puntate

esempio: "raddoppio"

1€ su R — se vinco mi accontento

se perdo 2€ su R

se perdo 4€ su R ...

continuo, al massimo, per n giri della ruota.

V_n = VINCITA $\qquad \mathbb{E}(V_n) = ?$

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \quad \omega_i = \{R, N\}\}^n \qquad$ prob. unif.

$$V_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega_1 = R \\ 1 & \text{se } \omega_1 = N,\ \omega_2 = R \\ 1 & \text{se } \omega_1 = \omega_2 = N,\ \omega_3 = R \\ \vdots & \\ 1 & \text{se } \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{n-1} = N,\ \omega_n = R \\ -\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k}_{= \frac{2^n - 1}{2-1}} & \text{se } \omega_1 = \dots = \omega_n = N \end{cases}$$

Quindi

$$V_n = \begin{cases} 1 & \text{prob } (1 - 2^{-n}) \\ -(2^{n} - 1) & \text{prob } 2^{-n} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(V_n) = 1 \cdot (1-2^{-n}) - (2^n - 1)\, 2^{-n} = 0$$

cos'altro poteva venire ?

Prop. Data una qualunque strategia di gioco "legale"

$$\mathbb{E}(V_n) = 0$$

strategia "legale": al giro k sappiamo i risultati dei giri $1, .., k-1$ e possiamo decidere cosa fare di conseguenza, ma ignoriamo cosa succederà nel futuro

dim strategia "legale" arbitraria

giro 1 punto f_0 su R (se $f_0 < 0$ punto su N)

giro 2 punto $f_1(\omega_1)$ su R

⋮

giro k " $f_k(\omega_1, \omega_2 .., \omega_k)$ su R

⋮

con $f_k : \{R, N\}^k \to \mathbb{R}$ arbitraria [$f_i = 0$ ipu vuol dire che me ne vado]

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-mo giro } R \quad \text{prob } 1/2 \\ -1 & \text{" " } N \quad \text{" } 1/2 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X_i) = 0 \quad \forall i$$

$$V_n = f_0 X_1 + f_1 X_2 + \cdots + f_{n-1} X_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f_{k-1}(\omega_1, .., \omega_{k-1})} \; \underbrace{X_k} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(V_n) = 0$$

sono v.a. indipendenti

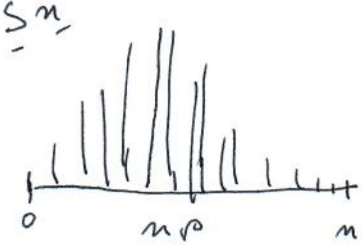
8. LEGGE DEI GRANDI NUMERI

- n lanci di moneta

$$S_n = \#\text{ Teste} \sim Bin(n,p)$$

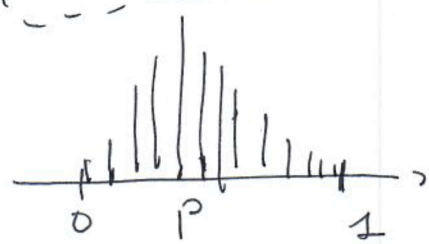
cosa succede $n \to \infty$ (p è fisso)

(distr. S_n)



guardiamo invece $\frac{S_n}{n}$

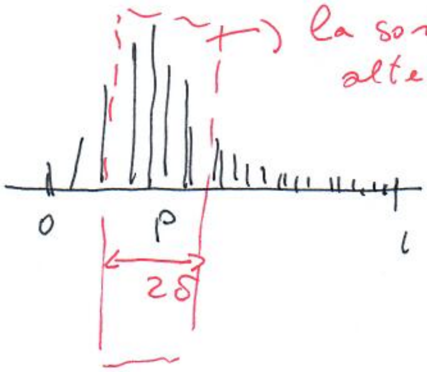
(distr. $\frac{S_n}{n}$)



l'altezza di ogni sbarretta $\to 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall k$$

Però la massa si concentra intorno a p. Fisso $\delta > 0$



la somma delle altezze di queste sbarre $\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

ovvero

$$\forall \delta > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \delta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

questo è il meccanismo della legge dei grandi numeri:

$\frac{S_n}{n}$ = frazione del numero di testa

diventa certo nel limite $n \to \infty$ e proprio uguale a p

Conviene astrarre la nozione di convergenza

<u>DEF</u> : CONVERGENZA IN PROBABILITA' DI V.A.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità

~~X_n / X~~ X v.a., X_n successione di v.a.

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \text{sse} \quad \forall \delta \quad \mathbb{P}(|X_n - X| < \delta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

<u>OSS.</u> ~~Il [illegible]~~

È diversa dalla convergenza puntuale delle funzioni

$$X_n(\omega) \to X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

richiede ~~che~~ [<u>circa</u>] che ciò accade per molti (come misurati da $\mathbb{P}$) $\omega \in \Omega$

È un risultato generale per somme di v.a. indipendenti non è speciale per schemi di Bernoulli.

<u>TEO</u> (legge dei grandi numeri)

Siano $X_1, \dots, X_n$ v.a. i.i.d. (indipendenti ed identicamente distribuite)

che ammettono $\mathbb{E}(\cdot)$ e $\mathbb{V}(\cdot)$, ~~[illegible]~~

Posta $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1) \quad \text{ovvero } \forall \delta > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_1) \right| < \delta \right) = 1$$

La dimostrazione dipende da 2 ingredienti

- Calcolo della varianza

$$\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

INDIP.

$$\xrightarrow{} \; = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- ~~variabili~~ varianza piccola
  $\Rightarrow$ v.a quasi certa

<u>Lemma 1</u> (Disuguaglianza di Chebyshev)

Sia Y v.a. con valore di attesa $\mathbb{E}(Y)$ (esiste)

$\forall \lambda > 0$

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{V}(Y)$$

<u>dim</u> <u>teo</u>.

per linearità di $\mathbb{E}(\cdot)$

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1)$$

Per Chebyshev

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \underbrace{\mathbb{E}(X_1)}_{=\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{\delta^2}\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

(calcolo di prima)

$$= \frac{1}{n\delta^2}\mathbb{V}(X_1) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Prima di dimostrare il lemma

<u>lemma 2</u> Sia $X \geq 0$ v.a. positiva

$\forall \lambda > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X)$$

<u>dim</u>

$$\mathbb{P}(X > \lambda) = \sum_{\substack{x \in Im(X): \\ x > \lambda}} \mathbb{P}(X = x) \quad \left[\frac{x}{\lambda} \geq 1 \right]$$

$$\leq \sum_{\substack{x \in Im(X) \\ \cancel{x > \lambda}}} \frac{x}{\lambda} \mathbb{P}(X = x)$$

tolgo il vincolo con un'altra maggiorazione

$$\leq \frac{1}{\lambda} \sum_{x \in Im(X)} x \, \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X)$$

<u>dim</u> <u>lemma 1</u>.

Uso lemma 2 con $X = |Y - \mathbb{E}(Y)|^2$

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \lambda) = \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)|^2 \geq \lambda^2)$$

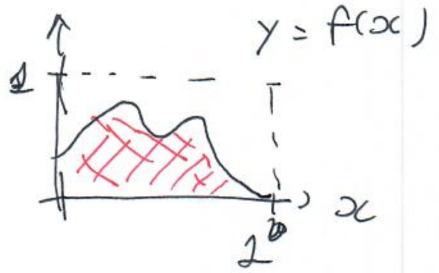
lemma 2

$$\leq \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))^2\right) = \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{V}(Y)$$

• Applicazione legge dei grandi per il calcolo numerico di integrali: metodo ~~Montecarlo~~ Montecarlo

genericamente: "metodo montecarlo" uso di algoritmi probabilistici per la soluzione di problemi deterministici. Può convenire!

Situazione: $f: [0,1] \to [0,1]$ continua



Area = ?

Fai così: ritaglia il grafico su un pezzo di lamiera e mettilo all'aria quando grandina

$$\text{Area} \approx \frac{\# \text{SDENG}}{\# \text{SDENG} + \# \text{FLOP}}$$

In effetti è proprio facile da realizzare

$X_i, Y_i \quad i=1,\dots,n \quad$ iid $\quad \mathrm{Unif}([0,1])$

[chiamate $2n$ volte il generatore di numeri casuali]

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{se } f(X_i) \geq Y_i \quad \text{"SDENG"} \\ 0 & \text{se } f(X_i) < Y_i \quad \text{"FLOP"} \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Effettivamente

$Z_i,\ i=1,\dots,n$ iid (sono v.a. limitate) ha sommabilità garantita

per la legge dei grandi numeri

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(Z_1)$$

$$\mathbb{E}(Z_1) = \mathbb{P}(Y_1 \leq f(X_1))$$ $X_1, Y_1 \sim UNIF((0,1))$ indip

Ora

$X, Y \sim UNIF((0,1))$

Vuol dire $\mathbb{P}(X \in (x, x+dx)) = dx$ $\quad x, y \in (0,1)$

$\mathbb{P}(Y \in (y, y+dy)) = dy$

quindi

~~$\mathbb{P}(f(X) \geq Y) = \int_0 \mathbb{P}(f(x) \geq$~~

~~$= \int_0^1 \mathbb{P}($~~

$$\mathbb{P}(Y_1 \leq f(X_1)) = \int_0^1 \underbrace{\mathbb{P}(Y \leq f(x))}_{= f(x)} dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Esercizio. Versione quantitativa.

Con probabilità $\geq 95\%$

$$\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i - \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{100}$$

pur di prendere $n \geq ?$

• Applicazione legge dei grandi numeri all'analisi: dimostrazione Teorema di Weierstrass

"ogni funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è limite uniforme di polinomi"

<u>TEO</u> sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua

$\exists$ successione di polinomi Q_n t.c.

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} \sup_{p\in[0,1]} | f(p) - Q_n(p) | = 0}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{p\in[0,1]} \left| f(p) - Q_n(p) \right| = 0$$

Idea

Sia $X_n \sim Bin(n,p)$

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} p \quad \overset{\text{(Esercizio)}}{\Longrightarrow} \quad \mathbb{E}\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right) \to f(p)$$

ora

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(X_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

è un polinomio di grado n in p

solo un po' di lavoro in più per ricavare la convergenza uniforme

[sopra ricavo solo convergenza puntuale in p]

dim

$$Q_n(p) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$Q_n(p) - f(p) = \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p) \right] \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Fisso $\delta > 0$ e divido la somma in due

$$\text{I} = \sum_{k: \left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta} \qquad\qquad \text{II} = \sum_{k: \left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \delta}$$

$$|\text{II}| \leq 2 \sup_{p \in [0,1]} |f(p)| \sum_{k: \left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \delta} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\leq 2M \ \mathbb{P}\left(\left| \frac{X_n}{n} - p \right| \geq \delta \right) \qquad \text{[uso Chebyshev]}$$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2} \mathbb{V}\left(\frac{X_n}{n} \right) = \frac{2M}{\delta^2} \frac{1}{n^2} n \, p(1-p)$$

$$\leq \frac{2M}{\delta^2} \frac{1}{n} \underbrace{\sup_{p \in [0,1]} p(1-p)}_{= \frac{1}{4}}$$

ricavo

$\forall \delta > 0$ ~~fis~~ fissato $\quad \text{II} \to 0$ per $n \to \infty$

basta quindi

$\text{I} \to 0$ per ~~$n \to \infty$~~ $\delta \to 0$ uniformemente in n

ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta = \delta_\varepsilon \cancel{(n)} \xleftarrow{} \text{indip. da } n \quad \text{T.C.} \quad |I| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \delta < \delta_\varepsilon$$

Ora

$$|I| \leq \sup_{\substack{k: \\ |\frac{k}{n} - p| < \delta}} |f(\tfrac{k}{n}) - f(p)| \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k:}}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{\leq 1}$$

Per Heine-Cantor

f continua $\Rightarrow$ f uniformemente continua

ovvero $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta = \delta_\varepsilon \cancel{(p, p')}$ T.C. ← indip da p, p'

$$|p - p'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(p) - f(p')| < \varepsilon$$

è proprio quello che ci serve

<u>Esercizio</u>. Versione quantitativa.

Volete approssimare f con un polinomio a meno di ε.

Come dovete prendere n ?

Dipende dal modulo di continuità uniforme

f Lipshitz $\qquad |f(p) - f(p')| \leq L\, |p - p'|$

$$|f(p)| \leq M$$

L, M noti.

Dato $\varepsilon > 0$ Trovare n_0 T.C. se $n \geq n_0$ $\quad [\, n_0 = n_0(M, L)\,]$

$$\forall p \in [0,1] \qquad |f(p) - Q_n(p)| \leq \varepsilon$$