(∞) Slogan:

"Prove ripetute: se qualcosa può succedere, prima o poi succede certamente"

Esempio

Una scimmia pigia a caso i tasti di una macchina da scrivere

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{prima o poi} \\ \text{scrive la divina} \\ \text{commedia}\end{array}\right) = 1$$

Modello $\mathcal{A} = \{a, b, \dots, z\}$ = alfabeto

$\Omega = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ = { ~~parole~~ scrittura della scimmia }

$\mathbb{P}$ probabilità prodotto di $\mathbb{P}_0$

ove $\mathbb{P}_0$ prob. su $\mathcal{A}$ t.c. $\mathbb{P}_0(\{a\}) > 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}$

[non serve $\mathbb{P}_0$ uniforme: solo che ogni tasta abbia prob. > 0 di essere pigiato]

Divina commedia = parole di N lettere fissate $= (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_N)$

"Nel ... stelle" N grande ma fisso

$$A_i = \left\{\begin{array}{c}\text{la divina commedia} \\ \text{è scritta da } i \text{ a } i+N\end{array}\right\} = \left\{\omega \in \Omega : \begin{array}{l}\omega_i = \bar{\omega}_1 \\ \dots \\ \omega_{i+N} = \bar{\omega}_N\end{array}\right\}$$

$$A = \left\{\begin{array}{c}\text{prima o poi la} \\ \text{divina commedia} \\ \text{è scritta}\end{array}\right\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

OSS: $\mathbb{P}(A_i) > 0$ poiché ogni lettera ha prob > 0 di essere scritta.

Vogliamo scoprire $\mathbb{P}(A) = 1$

A è un po' difficile, ma possiamo trovare un sottinsieme facile

$B_1 = \{$ la divina commedia è scritta da 1 a N $\} = \{\omega : \omega_1 = \bar{\omega}_1, \dots, \omega_N = \bar{\omega}_N\}$

$B_2 = \{$ - - - $_{N+1}$ a $2N \} = \{\omega : \omega_{N+1} = \bar{\omega}_1, \dots, \omega_{2N} = \bar{\omega}_N$

$\vdots$

$B_j = \{$ - - - $_{(j-1)N+1}$ a $jN \}$

$\vdots$

<u>oss</u> B_j sono eventi indipendenti

evidentemente

$$A \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$$

Sia ora

$$T(\omega) := \inf\{j : \omega \in B_j\}$$

per indipendenza dei B_j $T \sim \mathrm{Geom}(p)$

$p = \mathbb{P}(A_1)$

(piccolo ma > 0)

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{prima o poi}\\ \text{la divina commedia}\\ \text{è scritta}\end{array}\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \mathbb{P}(T < +\infty) = 1$$

con lo stesso argomento + σ-additività (esercizio)

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{la scimmia scrive}\\ \infty \text{ copie della divina}\\ \text{commedia}\end{array}\right) = 1$$

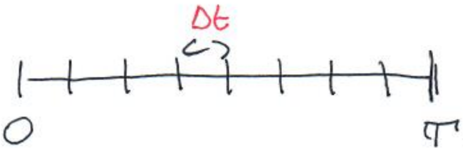
7. VARIABILE ALEATORIA DI POISSON

Motivazione dalla teoria delle code

Una centralina telefonica da dimensionare.

Quanti clienti arrivano ?

Ci serve un modello per il numero di clienti che arrivano [in un'unità di tempo] in una coda.



[un'unità di tempo]

Ipotesi (modellistiche)

- $\mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{un cliente arriva} \\ \text{in } [t, t+\Delta t)\end{array}\right) \propto \Delta t$ [proporzionale a Δt se Δt è piccolo]

- Arrivi in intervalli di tempo disgiunti sono indipendenti

  [i clienti non si mettono d'accordo per arrivare insieme]

Formalizziamo

$$t_i = \frac{i}{n} \qquad i = 0, .., n$$

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i) \qquad t_i - t_{i-1} = \frac{1}{n}$$

$$X_i = \#\text{ clienti che arrivano nell'intervallo } [t_{i-1}, t_i) = \begin{cases} 1 & \text{prob } \frac{\lambda}{n} \\ 0 & \text{prob } (1 - \frac{\lambda}{n}) \end{cases}$$

$$X_i \sim Bern\left(\frac{\lambda}{n}\right) \qquad \left(\text{tecnicamente } X_i = X_i^{(n)}\right)$$

λ = intensità (o tasso) degli arrivi

$\mathbb{P}($un arrivo in $[t, t+\Delta t]) = \lambda \Delta t$

(Δt piccolo)

sarà il parametro del modello

$$X^{(n)} = \#\text{ clienti arrivati in } [0,1]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)}$$

$X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)} \sim \mathrm{Bern}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ i.i.d

$X^{(n)} \sim \mathrm{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$

<u>Domanda</u> <u>naturale</u>: $n \to \infty$

[da Galileo in poi (se non prima) i modelli migliori sono ottenuti astraendo e facendo un limite che semplifichi le cose]

in ~~eff~~ effetti se n è finito è ridicolo (?)

$\mathbb{P}($un arrivo in $[1, \frac{1}{n}]) = \frac{\lambda}{n}$

La v.a. di Poisson (= # clienti che arrivano in coda nell'unità di tempo)

è ottenuta ~~co~~ passando al limite per $n \to \infty$

<u>Teo</u> (di Poisson)

Sia $X^{(n)} \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$ $\quad \lambda > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X^{(n)} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots, k, \dots\}$$

<u>oss</u>: l'affermazione è di limite puntuale k fisso e $n \to \infty$; non c'è nessuna affermazione di uniformità in k.

<u>dim</u> basta scrivere e fare il limite

$$\mathbb{P}(X^{(n)} = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ termini}}}{n^k}}_{\to 1} \frac{\overbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}^{\to e^{-\lambda}}}{\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}_{\to 1}}$$

infatti, per il limite notevole

$$e = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad \cancel{e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}}\right]^{\lambda} = \Big[\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}}_{\to e}\Big]^{-\lambda}$$

• V.A. Poisson

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $\qquad \lambda > 0$

$\text{Im}(X) = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots, k, \dots\}$

$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} \qquad k \in \mathbb{Z}_+$

per il nostro conforto

$$1 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1 \quad (\text{serie esponenziale})$$

• Istogramma della distribuzione

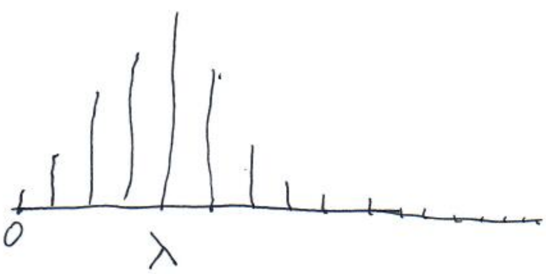
lo ottengo facile da quello della Binomiale

Bin(n, p)

ora $n \to \infty$, $p \to 0$

ma ma $np = \lambda$

Poisson(λ)



prima che ↗

fino a $k \simeq \lambda$

poi ↘

[parti intere da sistemare]

- Valore di attesa

$X \sim$ Poisson(λ)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \, \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty} \cancel{k} \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{\cancel{k!}\,(k-1)!}$$

$(h=k-1)$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{h+1}}{h!} = \lambda$$

Non poteva che ~~esse~~ essere così:

$X^{(n)} \sim Bin(n,p) \quad \mathbb{E}(X^{(n)}) = np$

nel limite di Poisson $np = \lambda$ = costante

domanda per gli scrupolosi:

basta il Teo di Poisson (senza uniformità in k) per concludere $\mathbb{E}(X) = \lim_n \mathbb{E}(X^{(n)})$?

domanda per gli scrupolosi ottimisti

Se la risposta a sopra è NO concludere lo stesso

$\mathbb{E}(X) = \lim_n \mathbb{E}(X^{(n)})$ aggiungendo qualcosa

~~gentile~~

- Varianza v.a. di Poisson

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty} k^{\cancel{2}}\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{\cancel{k!}\,(k-1)!}$$

$h = k-1$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^{h+1}}{h!}$$

$$= \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} h\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^h \lambda}{h!}}_{\lambda^2 \ [\text{rifaccio il calcolo per } \mathbb{E}(X)]} + \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^h \lambda}{h!}}_{\lambda}$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Sembra strano $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathbb{V}(X) = \lambda$

ma X per sua natura è un intero e non ~~ha~~ necessita di unità di misura

<u>In effetti</u>

$$\mathbb{V}(X^{(n)}) = n\,p(1-p) = n\,\frac{\lambda}{n}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \longrightarrow \lambda$$

METATEO (di Poisson) [non di matematica]

$$X^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)}$$

$X_i^{(n)}$ non necessariamente indipendenti, ma circa

$\mathbb{E}(X^{(n)}) \approx \lambda$ n grande, $n\,\mathbb{P}(X_i^{(n)}=1) \approx \lambda$

Allora

$$X^{(n)} \approx \text{Poisson}(\lambda)$$

Esempio

$X^{(n)}$ = # punti fissi permutazione di $\{1, \dots, n\}$ scelta con prob. uniforme

Abbiamo dimostrato

$$X^{(n)} \longrightarrow \text{Poisson}(1)$$

nel senso che

$$\mathbb{P}(X^{(n)} = k) \longrightarrow e^{-1}\frac{1}{k!} \qquad k \in \mathbb{Z}_+$$

$$X_i^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è fisso} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non sono indipendenti

ma circa sì per $n \to \infty$

Esercizio:

se $i \neq j$ $\quad \text{cov}(X_i^{(n)}, X_j^{(n)}) \approx \frac{1}{n^3}$

mentre $\quad \mathbb{E}(X_i^{(n)}) = \frac{1}{n}$

- Somma di Poisson indipendenti

$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ $\quad Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ $\quad$ indip

$Z = X + Y \sim \,?$

forza $h \leq k$

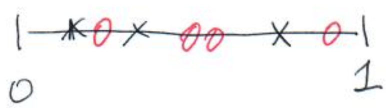
$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{h=0}^{\cancel{\infty}\ k} \mathbb{P}(X = h)\ \mathbb{P}(Y = k-h)$$

$$= \sum_{h=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^h}{h!}\ e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-h}}{(k-h)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \lambda_1^h \lambda_2^{k-h} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1+\lambda_2)^k$$

ovvero $\qquad Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$

<u>interpretazione</u> (o dimostrazione alternativa, senza calcoli)



due tipi di clienti

- con tasso λ_1
- " " λ_2

X = # clienti neri

Y = # clienti rossi

Se non distinguo i colori (sono daltonico per rosso/nero) vedo arrivare clienti con tasso $\lambda_1 + \lambda_2$

Ricavo $\qquad Z = X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$