6. VARIABILE ALEATORIA GEOMETRICA

Motivazione dalla teoria dell'affidabilità.

Una macchina soggetta a ~~guasti~~ guasti. ~~Opera~~ Opera su cicli. [Poi vedremo un modello con invece tempo continuo]

Quando si rompe?

Modello semplice: non ci sono effetti di invecchiamento, la macchina non si logora con il tempo.

Funziona così: ogni ciclo [o unità di tempo] il "Dio delle macchine" tira una moneta truccata, se Testa la macchina si rompe se Croce è pronta per il prossimo ciclo.

T = tempo rottura $= 1, 2, \dots, n, \dots$

[sarà v.a. geometrica]

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (lanci di moneta del Dio)

con probabilità prodotto $p = Prob(Testa) \in (0,1)$

$T(\omega)$ = primo lancio in cui esce Testa

$= \inf\{ i \in \mathbb{N}, ~~tale~~ \; \omega_i = 1 \}$

conveniamo $T(\omega) = +\infty$ $\quad (\inf(\emptyset) = +\infty)$

se $\omega_i = 0 \; \forall i$ $\quad$ Poiché $p \in (0,1)$

$\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$

<u>distribuzione</u>

$$\mathbb{P}(T=n) \overset{?}{=} \qquad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots \}$$

$$\mathbb{P}(T=1) = \mathbb{P}(\{\omega : \omega_1 = 1\}) = p$$

$$\mathbb{P}(T=2) = \mathbb{P}(\{\omega : \omega_1 = 0, \omega_2 = 1\}) = (1-p)p$$

$$\vdots$$

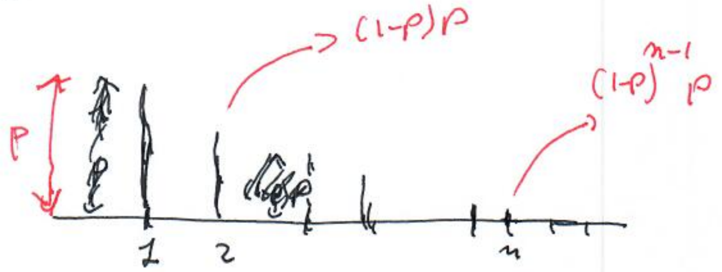
$$\mathbb{P}(T=n) = \mathbb{P}(\{\omega : \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{n-1} = 0, \omega_n = 1\})$$

$$= (1-p)^{n-1} p$$

$$\vdots$$

$$\mu_T(\{n\}) = (1-p)^{n-1} p \qquad n \in \mathbb{N}$$

è geometrica



$T \sim \mathrm{Geom}(p)$

- Per il nostro conforto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_T(\{n\}) \overset{?}{=} 1$$

$$\|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} p \overset{(k=n-1)}{=} p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

infatti $p > 0 \quad 0 \le 1-p < 1$

$p = 1$ è concesso, in questo caso $T = 1$ è certa

• Valore di altesa

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} n \, (1-p)^{n-1} p \qquad q = 1-p$$

$$= p \sum_{n=1}^{\infty} n \, q^{n-1} = p \sum_{n=0}^{\infty} n \, q^{n-1}$$

come si calcola ?

• Una possibilità: $n q^{n-1} = a_n - a_{n+1}$
[Teorema fondamentale del calcolo]

. . . .

provateci, funziona

• discuto invece la seguente alternativa

$$n q^{n-1} = \frac{d}{dq} q^n$$

$$= p \frac{d}{dq} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = p \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q}$$

$$= p \frac{1}{(1-q)^2} = (p = 1-q) = \frac{1}{p}$$

devo giustificare il passaggio [inversione di limiti]

$$\frac{d}{dq} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dq} q^n$$

ovvero

$$\lim_{h \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(q+h)^n - q^n}{h} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} n \, q^{n-1} \qquad 0 < q < 1$$

è convergente

Se somma finita va serie, rimane quindi

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(q+h)^n - q^n}{h}$$ piccola per N grande uniformemente in h

cioè

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{|h|<h_0} \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{(q+h)^n - q^n}{h} \right| = 0$$

per il teorema di Lagrange

$$\left| \frac{(q+h)^n - q^n}{h} \right| = n \, \xi^{n-1} \qquad \xi \in [q, q+h]$$

poiché $q < 1$ $\exists\ h_0 = h_0(q)$ tale

t.c. se $h \in [q-h_0, q+h_0]$ $|q+h| \leq \gamma < 1$

quindi

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{(q+h)^n - q^n}{h} \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} n \gamma^{n-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

poiché resto di una serie convergente

- <u>Varianza</u>

$$\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2$$

$$\mathbb{E}(T^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1-p)^{n-1} p \qquad q = 1-p$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 q^{n-1} p = p \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{d}{dq}(q^n)$$

$$= p \frac{d}{dq} \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{n} q^n$$

$= n+1-1$

$$= p \frac{d}{dq} \left\{ \sum_{\substack{n=\cancel{0} \\ -1}}^{\infty} \underbrace{(n+1) q^n}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{d}{dq} q^{n+1}}} - \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right\}$$

$$= p \frac{d}{dq} \left\{ \frac{d}{dq} \underbrace{\sum_{n=-1}^{\infty} q^{n+1}}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{1}{1-q}}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} q^n}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{1}{1-q}}} \right\}$$

$$= p \frac{d}{dq} \left\{ \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \right\} = p \frac{d}{dq} \left\{ \frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{1-q} \right\}$$

$(1-q=p)$

$$= p \left\{ \frac{2}{(1-q)^3} - \frac{1}{(1-q)^2} \right\} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}(1-p)$$

• Funzione di sopravvivenza

$\mathbb{P}$(la macchina continua a funzionare dopo n cicli)

$$= \mathbb{P}(T > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \qquad q = 1-p$$

$(\ell = k-n-1)$

$$= p \sum_{\ell=0}^{\infty} q^{\ell+n} = p\, q^n \overbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} q^{\ell}}^{= \frac{1}{1-q}} = q^n$$

[il resto di una serie geometrica è geometrico]

- Perdita di memoria [$q = 1 - p$]

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{l} \text{si rompe al} \\ \text{ciclo } n+\ell \end{array} \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{ha funzionato} \\ \text{per i primi } n \text{ cicli} \end{array} \right) \qquad n, \ell \in \mathbb{N}$$

$$= \mathbb{P}(T = n + \ell \mid T > n)$$

posso levare

$$= \frac{\mathbb{P}(T = n+\ell ,\ T > n)}{\mathbb{P}(T > n)} = \frac{\mathbb{P}(T = \ell + n)}{\mathbb{P}(T > n)}$$

$$= \frac{q^{\ell+n-1}\, p}{q^{n}} = q^{\ell-1}\, p$$

$$= \mathbb{P}(T = \ell)$$

interpretazione: non si logora, se ha funzionato i primi n cicli posso [pensare di] sostituire una macchina nuova e la probabilità di rottura dopo altri ℓ cicli non cambia

- La perdita di memoria caratterizza la v.a. geometrica

ovvero T è una v.a. che perde memoria
$\Rightarrow$ è necessariamente una v.a. geometrica

L'affermazione precisa è la seguente

Prop. [la perdita di memoria caratterizza la v.a. geometrica]

Sia T v.a. con $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$

e $\mathbb{P}(T=n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Se

$$\mathbb{P}(T = \ell + n \mid T > n) = \mathbb{P}(T = \ell) \qquad \forall \ell, n \in \mathbb{N}$$

Allora [perdita di memoria]

$T \sim \mathrm{Geom}(p)$ per un qualche $p \in (0,1)$

dim Sia

$q_n = \mathbb{P}(T > n)$ prob. di sopravvivenza $n \in \mathbb{N}$

basta verificare che $q_n = q^n$ per un qualche $q \in (0,1)$

infatti

$$\mathbb{P}(T=n) = \underbrace{\mathbb{P}(T > n-1)}_{= q_{n-1}} - \underbrace{\mathbb{P}(T>n)}_{= q_n} \qquad [q_0 = 1]$$

dalla perdita di memoria per $n = 1$

$$\frac{\mathbb{P}(T = \ell + 1)}{\underbrace{\mathbb{P}(T > 1)}_{= q}} = \mathbb{P}(T = \ell)$$

$$\mathbb{P}(T = \ell + 1) = q \, \mathbb{P}(T = \ell)$$

$$\underbrace{\sum_{\ell=n}^{\infty} \mathbb{P}(T = \ell+1)}_{= \mathbb{P}(T>n) = q_n} = q \underbrace{\sum_{\ell=n}^{\infty} \mathbb{P}(T=\ell)}_{= \mathbb{P}(T > n-1) = q_{n-1}}$$

ho ricavato

$q_n = q \, q_{n-1}$ e quindi $[q_0 = 1]$ $q_n = q^n$

(6) VARIABILE ALEATORIA BINOMIALE NEGATIVA

Quando la macchina si rompe non finisce tutto. Viene riparata [istantaneamente] e rimessa in produzione.

Quando si rompe di nuovo ?

$T^{(2)}$ = tempo di seconda rottura $= 2, 3, \dots$

$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{ (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) \mid \omega_i = 0,1 \}$ prob. prodotto

$$0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ \dots$$

T $\qquad$ $T^{(2)}$

$$T = T^{(1)}(\omega) = \inf\{ \overset{i>0}{\cancel{i \geq 1}} : \omega_i = 1 \}$$

$$T^{(2)}(\omega) = \inf\{ i > T^{(1)} : \omega_i = 1 \}$$

[ci sarà poi $T^{(3)}, \dots, T^{(k)}$]

<u>distribuzione</u> $T^{(2)}$

$$\mathbb{P}(T^{(2)} = n) = \mathbb{P}(\{\omega : \text{una testa tra } 1, \dots, n-1 \text{ e } \omega_n = \text{Testa}\})$$

$$= \binom{n-1}{1} p (1-p)^{n-2} p \qquad n \geq 2$$

$$= \binom{n-1}{1} p^2 (1-p)^{n-2}$$

- In generale

$T^{(k)}$ = tempo di k-ma rottura

$$\mathbb{P}(T^{(k)}=n) = \mathbb{P}(\{\omega : \ k-1 \text{ Teste tra } 1,\dots,n-1 \text{ e Testa al lancio } n\})$$

$$= \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-k-1} \, p \qquad \cancel{k=1,n,n+1,\dots}$$

$n = k, k+1, \dots$

$$= \binom{n-1}{k-1} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

$T^{(k)} \sim Bin^{-}(k,p) \qquad T^{(1)} = T \sim Geom(p)$

$= Bin^{-}(1,p)$

<u>Valore di attesa</u>

$$\mathbb{E}(T^{(k)}) = \sum_{n=k}^{\infty} n \ \mathbb{P}(T^{(k)}=n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} n \binom{n-1}{k-1} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{p^k}{(k-1)!} \sum_{n=\cancel{k}\,0}^{\infty} \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1) \quad q^{n-k}}_{\frac{d^k}{dq^k} q^n}$$

$$= \frac{p^k}{(k-1)!} \frac{d^k}{dq^k} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{p^k}{(k-1)!} \frac{d^k}{dq^k} \frac{1}{1-q}$$

$$= \frac{p^k}{(k-1)!} \frac{k!}{(1-q)^{k+1}} = \frac{k}{p}$$

è intuitivo:

$\mathbb{E}(T^{(k)}) = k \ \mathbb{E}(T^{(1)})$

• Varianza. Via calcolo diretto: esercizio

Argomento alternativo caso di $T^{(2)}$

$$0\,0\,0\,\overset{T}{1}\;\underbrace{0\,0\,0\,0\,\overset{T^{(2)}}{1}}_{\tilde{T}}$$

$\tilde{T}$ = # cicli tra prima e seconda rottura

è come ricominciare da zero : $\tilde{T} \sim Geom(p)$

inoltre, per l'indipendenza dei lanci,

T e $\tilde{T}$ sono v.a indipendenti

concludo

$$T^{(2)} = T + \tilde{T} \quad \text{con } T, \tilde{T} \sim Geom(p) \text{ e indipendenti}$$

<u>Ricavo</u>:

$$\mathbb{E}(T^{(2)}) = \mathbb{E}(T) + \mathbb{E}(\tilde{T}) = \frac{2}{p}$$

$$\mathbb{V}(T^{(2)}) = \mathbb{V}(T) + \mathbb{V}(\tilde{T}) = 2\,\frac{(1-p)}{p^2}$$

Verifico che T e $\tilde{T}$ sono effettivamente v.a. indipendenti

$$\mathbb{P}(T = n, \tilde{T} = m) = \mathbb{P}(\underbrace{0 \cdots 0}_{n-1}1\underbrace{0 \cdots 0}_{m-1}1)$$

$$= (1-p)^{n-1} p\, (1-p)^{m-1} p \quad \cancel{= \mathbb{P}(T=n)\,\mathbb{P}(\tilde{T}=m)}$$

$$\mathbb{P}(T=n) = \mathbb{P}(\underbrace{0 - 0}_{n-1}\, 1) = (1-p)^{n-1} p$$

$$\mathbb{P}(\tilde{T} = m) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=n, \tilde{T}=m)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} p}_{1}\, (1-p)^{m-1} p = (1-p)^{m-1} p$$

stesso per k invece di 2

$$T^{(k)} \overset{\text{Legge}}{=} \sum_{i=1}^{k} T_i \qquad \text{con } T_i \sim Geom(p) \text{ indipendenti}$$

le due variabili aleatoria hanno la stessa distribuzione, non è l'affermazione che ~~sono~~ sono la stessa funzione

[iid : indipendenti ed identicamente distribuite]

(6) SOMMA DI V.A. INDIPENDENTI

Problema generale X, Y v.a. $Z = X + Y$

anche se conosciamo la distribuzione di X e Y non possiamo ricavare la distribuzione di Z

esempio

se $Y(\omega) = X(\omega)$ $\quad Z(\omega) = X(\omega) + X(\omega) = 2X(\omega)$

se $Y(\omega) = -X(\omega)$ $\quad Z(\omega) = 0$

se la distribuzione di X è pari X e $-X$ hanno la stessa distribuzione

Se però sappiamo che X e Y sono indipendenti allora la distribuzione di Z è univocamente determinata dalle distribuzioni di X e Y

In particolare: vogliamo ricavare la distribuzione di $T^{(2)}$ ~~dalla distribution~~ come somma di due geometriche iid.

Prop X, Y v.a indipendenti $\quad Z = X+Y$

$$\mathbb{P}(Z=z) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=z-x), \quad z \in \mathrm{Im}(Z)$$

dim

$$\Omega = \bigcup_{x \in \mathrm{Im}(X)} \{X=x\} \quad \text{partizione}$$

$$\mathbb{P}(Z=x) = \mathbb{P}\Big(\{Z=z\} \cap \bigcup_{x \in \mathrm{Im}(X)} \{X=x\}\Big)$$

$$= \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \mathbb{P}(\underbrace{X+Y=z}_{\substack{\parallel \\ Y=z-x}},\ X=x)$$

$$\overset{\text{indipendenza}}{=} \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=z-x)$$

A volte si usa questa notazione

$$\mu_Z = \mu_X * \mu_Y \quad (* \text{ convoluzione})$$

$$\mu_Z(\{z\}) = \sum_x \mu_X(\{x\})\,\mu_Y(\{z-x\})$$

• Vediamo come si applica nel caso di geometriche

$$\mathbb{P}(T^{(2)}=n) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=m) \underbrace{\mathbb{P}(\tilde{T}=n-m)}$$

Forza $m \le n-1$
$(\tilde{T} \geq 1)$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} (1-p)^{m-1} p \quad (1-p)^{n-m-1} p$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1} (1-p)^{n-2} p^2 = (n-1)(1-p)^{n-2} p^2$$

$$= \binom{n-1}{1} p^2 (1-p)^{n-2}$$ è tornato

$$T^{(3)} \overset{\text{legge}}{=} T^{(2)} + T^{(1)}$$

Forza $m \le n-1$

$$\mathbb{P}(T^{(3)}=n) = \sum_{m=2}^{\infty} \mathbb{P}(T^{(2)}=m) \, \mathbb{P}(T^{(1)}=n-m)$$

$$= \sum_{m=2}^{n-1} (m-1) p^2 (1-p)^{m-2} \quad (1-p)^{n-m-1} p$$

$$= p^3 (1-p)^{n-3} \underbrace{\sum_{m=2}^{n-1} (m-1)}_{\shortparallel}$$

$$\sum_{m=1}^{n-2} m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = \binom{n-1}{2}$$

$$= \binom{n-1}{2} p^3 (1-p)^{n-3}$$ è tornato