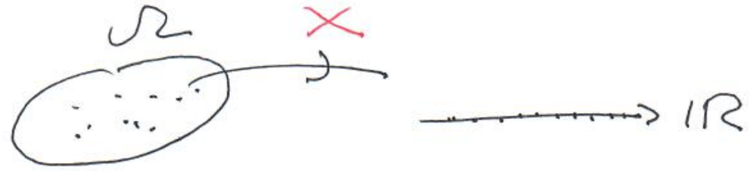
5. VARIABILI ALEATORIE

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ è una variabile aleatoria



"una scommessa sul risultato dell'esperimento"
"una misura sul risultato dell'esperimento"

Esempi

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lancio un dado equo
$\Omega = \{1, \dots, 6\}$ con prob. uniforme

$$X_1 = \begin{cases} -3 & \omega = 1 \\ -2 & \omega = 2 \\ -1 & \omega = 3 \\ 1 & \omega = 4 \\ 2 & \omega = 5 \\ 3 & \omega = 6 \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} -2 & \omega = 1,2 \\ -1 & \omega = 3 \\ 1 & \omega = 4 \\ 2 & \omega = 5,6 \end{cases}$$

X_1 è iniettiva: sapere X_1 è lo stesso che conoscere l'evento elementare ω
[è solo una diversa codifica dei risultati]

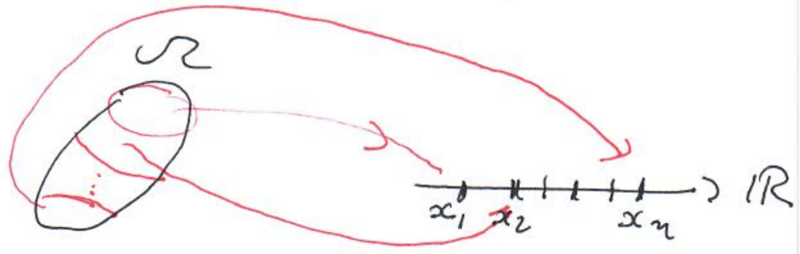
X_2 non è iniettiva, $\{X_2(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ ha meno informazioni. Se ci interessa solo X_2 non distinguiamo tra $\omega = 1$ e 2 come $\omega = 5$ o 6

Possiamo costruire un nuovo spazio di probabilità con meno eventi elementari
→ più facile da analizzare

Se 20 lanci di moneta $|\Omega| = 2^{20}$ enorme
Se mi interessa solo il numero di teste
ci sono solo 21 possibilità.

- Costruzione spazio di probabilità che descrive completamente la v.a. X 'dimenticando' alcuni eventi elementari

$$\mathcal{X} = \mathrm{Im}(X) = \{ X(\omega),\ \omega \in \Omega \} \subset \mathbb{R}$$



$$\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$$

nuovo spazio eventi elementari
"possibili valori della v.a. X"

con la probabilità

$$\mu_X(B) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) \in B\}) \qquad B \subset \mathcal{X}$$

$$= \mathbb{P}(\underbrace{X^{-1}(B)}_{})$$

X^{-1} definita su sottoinsiemi (preimmagine)

$\mu_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ DISTRIBUZIONE della v.a. X
o LEGGE

[è una probabilità su $\mathcal{X} = \mathrm{Im}(X)$]

Vediamo che μ_X è effettivamente additiva

se $B_1 \cap B_2 = \emptyset \implies X^{-1}(B_1 \cup B_2) = X^{-1}(B_1) \cup X^{-1}(B_2)$
[unione disgiunta]

per additività di $\mathbb{P}$ ricavo

$$\mu_X(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}(X^{-1}(B_1) \cup X^{-1}(B_2)) = \mu_X(B_1) + \mu_X(B_2)$$

• Nell'esempio di prima

$\mathcal{X}_1 = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ $\qquad \mu_{X_1}$ Prob. uniforme su $\mathcal{X}_1$

$\mathcal{X}_2 = \{-2, -1, 1, 2\}$

$$\mu_{X_2}(\{x\}) = \begin{cases} 2/6 & x = -2 \\ 1/6 & x = -1 \\ 1/6 & x = 1 \\ 2/6 & x = 2 \end{cases}$$

(per un po' solo queste)

VARIABILI ALEATORIE

- DISCRETE se $Im(X)$ è finito o numerabile
- CONTINUE altrimenti ($Im(X)$ ha la cardinalità di $\mathbb{R}$)

Evidentemente se X è v.a. discreta

$\mathcal{X} = Im(X) = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ e $\mu_X = \text{Legge}(X)$ è determinata dal suo valore sui singoletti $\{x\}$ $x \in \mathcal{X}$

Esempio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lancio dado ~~equo~~

X_1 e X_2 sono evidentemente scommesse eque

$$X_3 = \begin{cases} -1 & \omega = 1, 2 \\ 0 & \omega = 3 \\ 1 & \omega = 4, 5 \\ 2 & \omega = 6 \end{cases}$$

X_3 è evidentemente vantaggiosa (per lo scommettitore)

Vogliamo stabilire una quota di ingresso equa

... quota equa $= 2 \cdot \frac{1}{6}$

altro esempio

$$X_4 = \begin{cases} -100 & \omega = 1 \\ 0 & \omega = 2, 3, 4 \\ 1 & \omega = 5, 6 \end{cases}$$

quote eque $= -\frac{100}{6} + \frac{2}{6}$

Valore di attesa (media) di una v.a.

X v.a. discreta

DEF

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \, \mu_X(\{x\})$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \, \mathbb{P}(\underbrace{X = x}_{= \{\omega : X(\omega) = x\}}) =$$

media valori di X pesata con la rispettiva probabilità

OSS Se Ω è discreto pure, posso calcolare $\mathbb{E}(X)$ anche sommando sugli eventi elementari originali $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \, \mathbb{P}(\{\omega\})$$

infatti

$$\sum_{\omega \in \Omega} \cdots = \sum_{x \in Im(X)} \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \cdots$$

$$\text{destra} = \sum_{x \in Im(X)} \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \underbrace{X(\omega)}_{= x} \, \mathbb{P}(\{\omega\})$$

$= \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\}))$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \, \mu_X(\{x\})$$

Se $\mathcal{X} = \mathrm{Im}(X)$ è numerabile $\mathbb{E}(X)$ è una serie

la convergenza non è garantita e richiede condizioni sulla v.a. X

Nozione utile è la convergenza assoluta della serie

X v.a. ammette valore di attesa quando

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} |x| \, p_X(\{x\}) < +\infty$$

in tal caso

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \, p_X(\{x\}) \quad \text{è ben definito}$$

evidentemente se X è una v.a. <u>limitata</u> $\mathbb{E}(X)$ esiste sicuramente.

Se $X \geq 0$ (ovvero $X(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$) non c'è ambiguità. Conviene stipulare che $\mathbb{E}(X)$ ~~esiste~~ è comunque definito

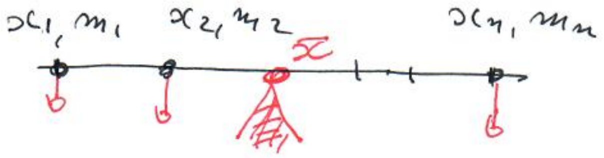
ma può accadere $\mathbb{E}(X) = +\infty$

<u>oss</u> v.a. con $\mathbb{E}(X) = +\infty$ ogni tanto capitano. In effetti già ne conosciamo una.

X = tempo di primo ritorno in 0 per la passeggiata aleatoria unidimensionale

$$\mathbb{P}(X = 2n) \sim \frac{1}{n^{3/2}} \implies \mathbb{E}(X) = \sum_n 2n \, \mathbb{P}(X = 2n) = +\infty$$

Interpretazione meccanica $\mathbb{E}(X)$



affinché l'altalena stia in equilibrio

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \text{baricentro}$$

è come il valore di attesa interpretando m_i con $\mathbb{P}(X = x_i)$. In tal modo $\sum_{i=1}^{n} m_i = 1$

Istogramma distribuzione

X v.a. $\quad \mathcal{X} = \mathrm{Im}(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$

$$p_1 = \mu_X(\{x_1\}), \dots, p_n = \mu_X(\{x_n\})$$

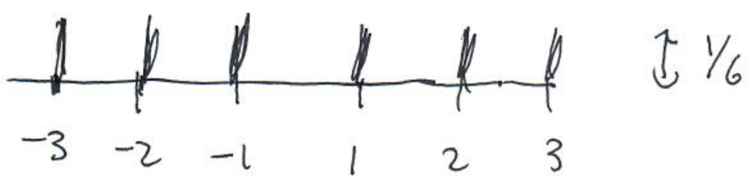
contiene tutte le informazioni sulla v.a. X

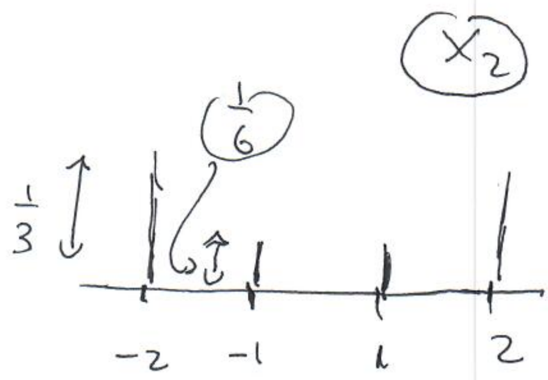
Esempio iniziale dado equo

$$X_1 = \begin{cases} -3 & \omega = 1 \\ -2 & \omega = 2 \\ -1 & \omega = 3 \\ 1 & \omega = 4 \\ 2 & \omega = 5 \\ 3 & \omega = 6 \end{cases} \qquad X_2 = \begin{cases} -2 & \omega = 1,2 \\ -1 & \omega = 3 \\ 1 & \omega = 4 \\ 2 & \omega = 5,6 \end{cases}$$

sono entrambe scommesse eque:

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = 0$$





Se la distribuzione ha un asse di simmetria ($x=0$ in questo caso) troviamo subito $\mathbb{E}(X)$

Evidentemente X_1 è "più rischiosa" di X_2
Vogliamo quantificare numericamente questo "rischio" o in altri termini di quanto una v.a. X ~~[illegible]~~ fluttui intorno al suo valore di attesa.

- <u>Varianza</u> <u>di</u> <u>una</u> <u>variabile</u> <u>aleatoria</u>

<u>oss.</u> Consideriamo gli ~~[illegible]~~ "scarti" dalla media $x_i - \mathbb{E}(X)$ e li sommiamo pesando con la rispettiva probabilità

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} [x - \mathbb{E}(X)] \, \mathbb{P}(X=x) = 0$$

per definizione di $\mathbb{E}(X)$

"in media gli scarti si cancellano"

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} (x - \mathbb{E}(X))^2 \, \mathbb{P}(X = x)$$

$$= \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2 \right)$$

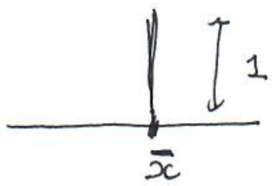
Varianza di X = scarto quadratico medio

<u>OSS</u> $\mathbb{V}(X) \geq 0$ $\quad \mathbb{V}(X) = 0$ sse X è v.a. certa

$[\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}$ t.c. $\mathbb{P}(X = \bar{x}) = 1]$

⓪ CATALOGO VARIABILI ALEATORIE (senza ~~gran~~ considerare lo spazio di probabilità ove sono definite)

- <u>X v.a. certa</u> $\quad |\mathrm{Im}(X)| = 1 \quad \mathcal{X} = \{\bar{x}\}$

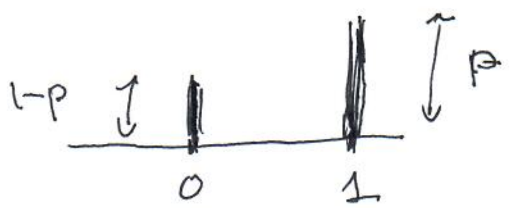


$\mathbb{E}(X) = \bar{x} \quad \mathbb{V}(X) = 0$

non è tanto interessante

- <u>X v.a. di Bernoulli</u> [Domanda binaria sull'esperimento codificata in 0 e 1]

$$X = \begin{cases} 0 & \text{con prob. } 1-p \\ 1 & \text{" "} \quad p \end{cases} \qquad \text{ove} \quad p \in [0,1]$$



$X \sim \mathrm{Bern}(p)$

X è una v.a. ~~di~~ con distribuzione di Bernoulli di parametro p

$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

$\mathbb{V}(X) = (0-p)^2 (1-p) + (1-p)^2 p$

$= p(1-p) [p + (1-p)] = p(1-p)$

è giusto che sia simmetrica rispetto $p \to 1-p$

- X v.a. Binomiale

n lanci di moneta truccata (con $p = \text{Prob.}(T)$)

$X = \#$ Teste

$\Omega = \{0,1\}^n$ schema di Bernoulli con $\mathbb{P}$ prodotto da $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-p$, $\mathbb{P}(\{1\}) = p$

$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \qquad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \qquad \omega_i = 0,1$

$\mathcal{X} = \mathrm{Im}(X) = \{0, 1, \dots, n\}$

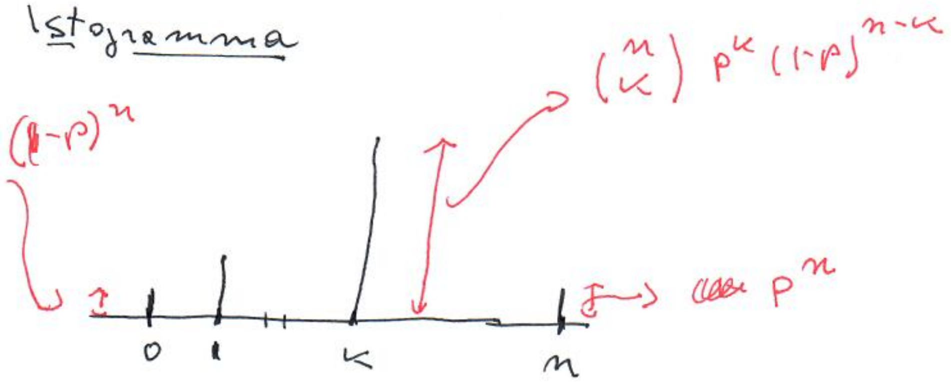
$\mu_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$k = 0, \dots, n$

2 parametri $n \in \mathbb{N}$ $\quad p \in [0,1]$

$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ La legge di X è binomiale di parametri ~~...~~ n e p

Istogramma



Un esercizio richiedeva dimostrare che era effettivamente così:

$\mathbb{E}(X) = ?$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \, \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ 1}}^{n} \cancel{k} \frac{n!}{\underset{(k-1)!}{\cancel{k!}} (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$h = k-1$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{h=0}^{n-1} n \underbrace{\frac{(n-1)!}{h!\,(n-1-h)!}}_{\binom{n-1}{h}} p^{h+1} (1-p)^{n-1-h}$$

$$= np \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} p^h (1-p)^{n-1-h} \underset{\text{binomio}}{=} np \, (p+1-p)^{n-1}$$

$$= np$$

È intuitivo: in media # Teste $= np$

c'è un modo di ricavare questo risultato senza calcoli

- Variabili aleatorie come spazio vettoriale e linearità del valore di attesa

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ considero $|\Omega| < +\infty$ e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathcal{V} = \{ \text{v.a. su } \Omega \} = \{ X : \Omega \to \mathbb{R} \}$$

ha una struttura naturale di spazio vettoriale

$X + Y$ def da $\qquad (X+Y)(\omega) := X(\omega) \overset{\text{somma in } \mathbb{R}}{+} Y(\omega)$

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha \cdot X$ def da $\qquad (\alpha \cdot X)(\omega) := \alpha \underset{\text{prodotto in } \mathbb{R}}{\cdot} X(\omega)$

in effetti $\mathcal{V} \approx \mathbb{R}^n$ se $|\Omega| = n$

Ora $\mathbb{E}(\cdot)$ è un'applicazione che ad una v.a. X fa corrispondere un reale

$$\mathbb{E}(\cdot) : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>Prop</u> $\mathbb{E}(\cdot)$ è lineare

ovvero

X, Y v.a. $\qquad \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

X v.a. $\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{E}(\alpha X) = \alpha \, \mathbb{E}(X)$

<u>dim</u> È facile se uso la rappresentazione di $\mathbb{E}(\cdot)$ sommando sui punti di Ω

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \, \mathbb{P}(\{\omega\})$$

$$\mathbb{E}(X+Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \cdots = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(\alpha X) = \sum_{\omega\in\Omega} \alpha X(\omega)\, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \alpha \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \alpha\, \mathbb{E}(X)$$

— o —

Per $X \sim Bin(n,p)$

$\Omega = \{(\omega_1,\dots,\omega_n) \quad \omega_i = 0,1\}$ con prob. prodotto

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

introduco

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-mo lancio } T \\ 0 & \text{se '' '' } C \end{cases} = \omega_i$$

$X_i \sim Bern(p)$ $\qquad X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Per linearità di $\mathbb{E}(\cdot)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{= p} = np$$

<u>Esercizio</u> (lo discuto la prossima volta)

Se $X \sim Bin(n,p)$ $\qquad \mathbb{V}(X) = ?$