Coefficienti multinomiali e multinomio

n oggetti li voglio dividere in k gruppi (distinti) da $n_1, n_2, \dots, n_k$ elementi ciascuno

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$$

Quante scelte?

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\;\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\;\cdots$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!} \overset{\text{(nuovamente)}}{=} \binom{n}{n_1\; n_2\; \dots\; n_k}$$

Multinomio

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}\, a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$$

dim $\quad (a_1 + \dots + a_k)^n = \underbrace{(a_1 + \dots a_k) \cdots (a_1 + \dots a_k)}_{n \text{ volte}}$

$$= \dots$$

$\square$

ex lancio un dado equo 6 volte

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^6 \qquad |\Omega| = 6^6$$

$\mathbb{P}$(1 volta 1, 2 volte 2, 3 volte 6)

$$= \frac{6!}{1!\,2!\,0!\,0!\,0!\,3!}\;\frac{1}{6^6}$$

Ruolo indistinguibilità

- Lancio un dado rosso e uno blu

$$\Omega = \{(\omega_R, \omega_B) \quad \omega_R, \omega_B = 1, \dots, 6\} = \{1, \dots, 6\}^2 \qquad |\Omega| = 36$$

prob. uniforme (se dadi equi)

- Lancio (insieme) due dadi rossi

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} 11 & 12 & & 16 \\ & 22 & & 26 \\ & & \ddots & \\ & & & 66 \end{matrix} \right\} = \{(\omega_1, \omega_2) \quad 1 \le \omega_1 \le \omega_2 \le 6\}$$

$|\Omega| = 21$

Prob. uniforme ?

Evidentemente no: penso che uno dei due dadi sia blu, ma io sono daltonico

Equivalentemente: posso distinguere i dadi, in teoria, seguendo il loro percorso nel lancio

$$\mathbb{P}(\{11\}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\{12\})$$

$\dots\dots$

Eredito $\mathbb{P}$ da dado R, dado B non distinguendo più il colore

Eppure: in mecc. quant. (NON in questo corso) l'indistinguibilità ha un carattere più profondo. Se elettroni invece di dadi prob. uniforme su Ω è in accordo con gli esperimenti!

Campionamento $\boxed{\text{non}}$ ordinato $\boxed{\text{con}}$ rimpiazzo

n PALLINE

k estrazioni non ordinate con rimpiazzo

$$\tilde{\Omega} = \{\text{estrazioni ordinate}\} = \{1, \dots, n\}^k = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) \quad \omega_i = 1, \dots, n\}$$

$\omega_1 = \#$ 1ª estratta ...

$$|\tilde{\Omega}| = n^k$$

su $\tilde{\Omega}$ c'è $\sim$ (relaz. equivalenza)

def da

$\omega \sim \omega'$ se differiscono per l'ordine

$$(1, 3, 3, 6) \sim (3, 1, 6, 3)$$

$\Omega = \tilde{\Omega}/\sim$ (se scelgo un rappr. per ogni classe)

$$= \{(\omega_1, \dots, \omega_k) \quad 1 \le \omega_1 \le \omega_2 \le \dots \le \omega_k \le n\}$$

$\omega_1 =$ più piccola estratta

$\omega_2 = \dots$

$\vdots$

$\omega_k =$ più grande estratta

ma con possibili ripetizioni

$|\Omega| = ?$ ora non è più vero che ogni classe ha lo stesso numero di elementi:

classe di $(1, \dots, 1)$ 1 elemento

" " $(1, 2, \dots, k)$ $k!$ elementi

Descrivo il risultato dell'esp. (= evento elementare) con una codifica diversa

1 1 3 5 5 6 6 6 $\qquad n = 6 \qquad k = 8$

$\ast\ast \mid \; \mid \ast \mid \; \mid \ast\ast \mid \ast\ast\ast$

#1 separatore #2 #3 #4

è chiaramente una biezione

Quante $\ast$? $\rightsquigarrow$ k

Quante $|$? $\rightsquigarrow$ $n-1$

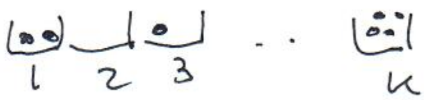
Pertanto:

$$|\Omega| = \binom{n+k-1}{k}$$

<u>oss</u> per i due dadi di prima
$n=6 \quad k=2$

$$\binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,5!} = 7 \cdot 3 = 21$$

<u>EX</u> n palline indistinguibili in k scatole



$w_1 = \#$ palline scatola 1 $= 0, \dots, n$
$\vdots$
$w_k = \# \dots k$

$$w_1 + \dots + w_k = n$$

$$\Omega = \{ (w_1, \dots, w_k), \; \sum_{i=1}^{k} w_i = n, \; w_i \geq 0 \} \qquad |\Omega| = ?$$

* Problema accoppiamenti
(numero p.ti fissi permutazione aleatoria)

n coppie
Si ridistribuiscono a caso

$\mathbb{P}$(nessuna coppia originale si riforma)

cosa succede per $n \to \infty$?

numero il primo elemento di ogni coppia $1, \dots, n$

ω_1 = nuovo compagno di 1
$\vdots$
ω_n = " " " n

$$\Omega = \{ (\omega_1, \dots, \omega_n) \ , \ \omega_i = 1, \dots, n \ , \ \omega_i \neq \omega_j \ i \neq j \}$$

evidentemente
$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} \text{permutazioni} \\ \text{di } 1, \dots, n \end{matrix} \right\} = S_n$$

Dico che i è punto fisso di $\omega \in S_n$
quando $\omega_i = i$

Allora

$$\mathbb{P}(\{ \omega \text{ ~~che~~ non ha p.ti fissi} \}) = ?$$

$|\Omega| = n!$

Passiamo al complementare

$A = \{ \omega$ ha almeno un p.to fisso $\}$

$A = \{ \omega \in \Omega : \exists i \text{ per cui } \omega_i = i \}$

$= A_1 \cup \cdots \cup A_n$

$A_i = \{ \omega : \omega_i = i \}$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$= \mathbb{P}(A_2) = \cdots = \mathbb{P}(A_n)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(\{ 1 \text{ e } 2 \text{ sono pti fissi} \}) = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$\vdots$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(\{ 1, \ldots, n \text{ sono fissi} \})$$

$$= \mathbb{P}(\{ \text{permutaz. identica} \}) = \frac{1}{n!}$$

ora escl/incl.

$$\mathbb{P}(A) = \cdots = \binom{n}{1} \mathbb{P}(A_1) - \binom{n}{2} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$$

$\mathbb{P}(\{0 \text{ p.ti fissi}\}) = \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

se $n \to \infty$

$$\mathbb{P}(\{0 \text{ p.ti fissi}\}) \to \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = \frac{1}{e}$$

Altra domanda

$$\mathbb{P}(\{\omega \text{ ha (esatti) } h \text{ p.ti fissi}\}) = ?$$

prima una più facile

$$B = \left\{ \omega : \begin{array}{l} 1, 2, \dots, h \text{ sono fissi} \\ h+1, \dots, n \text{ no} \end{array} \right\}$$

sappiamo che

$$\left| \left\{ \begin{array}{l} \text{permutazioni di } 1, \dots, m \\ \text{senza p.ti fissi} \end{array} \right\} \right| = m! \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

quindi

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{n!} (n-h)! \sum_{k=0}^{n-h} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

Ora è facile

$$\mathbb{P}(\{h \text{ p.ti fissi}\}) = \binom{n}{h} \mathbb{P}\left(\left\{ \begin{array}{l} 1, \dots, h \text{ sono fissi} \\ \text{gli altri no} \end{array} \right\}\right)$$

$$= \binom{n}{h} \mathbb{P}(B)$$

$$= \frac{n!}{h!\,(n-h)!} \frac{(n-h)!}{n!} \sum_{k=0}^{n-h} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

$$= \frac{1}{h!} \sum_{k=0}^{n-h} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

In particolare

$$\mathbb{P}(\{h \text{ p.ti fissi}\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e} \frac{1}{h!}$$

Se potessimo scegliere una permutazione a caso di $\{1, n, \dots\} = \mathbb{N}$ [non è esattamente consentito]

$$\mathbb{P}(\{\infty \text{ p.ti fissi}\})$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\{\infty \text{ p.ti fissi}\}^c)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} \{h \text{ p.ti fissi}\}\right)$$

$$= 1 - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{e} \frac{1}{h!} = 1 - \frac{1}{e} e = 0$$