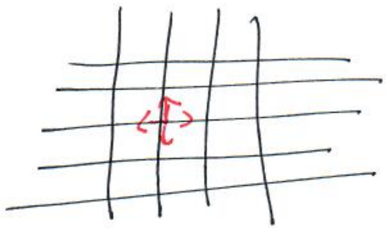
• Ricorrenza / Transienza passeggiata aleatoria

$\mathbb{Z}^2$



$t = 0 \qquad S_0 = 0$

$$t = 1 \qquad S_1 = \begin{cases} e_1 & 1/4 \\ -e_1 & 1/4 \\ e_2 & 1/4 \\ -e_2 & 1/4 \end{cases} \qquad \text{Prob}$$

$\vdots$

gli incrementi sono poi generati allo stesso modo (un dado equo a 4 facce tirato tante volte)

Il passeggiatore tornerà – prima o poi – in 0 ?

evidentemente

$$\mathbb{P}(S_2 = 0) = \underbrace{\mathbb{P}(S_1 = e_1, S_2 = 0) + \dots +}_{4 \text{ termini uguali}}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{4} > 0$$

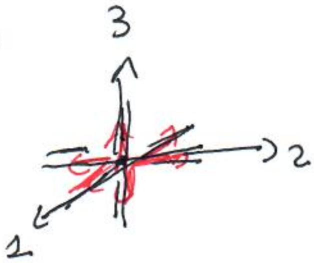
ma la domanda è invece

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{c} \text{prima o poi} \\ \text{torna in } 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} = 1 \rightarrow \text{RICORRENTE} \\ < 1 \rightarrow \text{TRANSIENTE} \end{array} \; ?$$

non ci limitiamo al caso di $\mathbb{Z}^2$

• Passeggiata aleatoria (simmetrica, semplice) su $\mathbb{Z}^d$

$S_0 = 0$ se $d=3$



$$S_1 = \begin{cases} \pm e_1 & \frac{1}{2d} \\ \vdots & \\ \pm e_d & \frac{1}{2d} \end{cases} \quad \text{prob}$$

$S_{n+1} = S_n +$ incremento scelto tirando un dado equo a $2d$ facce

Aspetto peculiare (e interessante) è che la risposta alla domanda dipende da d

in effetti è intuitivo: se d è grande assistente il passeggiatore si perde tra i membri di $\mathbb{Z}^d$ senza tornare in 0 con probabilità > 0

<u>TEO</u> La passeggiata aleatoria simmetrica semplice su $\mathbb{Z}^d$ è:

~~transiente~~ ricorrente se $d = 1, 2$

transiente se $d \geq 3$

Strategia della dimostrazione:

- un criterio generale (valido $\forall d$ e in altri contesti)
- applicazione al caso della passeggiata aleatoria su $\mathbb{Z}^d$

la passeggiata ha un evidente parità
$\therefore$ può tornare in 0 solo per tempi pari

$$u_{2n} := \mathbb{P}(S_{2n}=0) \qquad (u_0 = 1)$$

<u>CRITERIO</u> La pass. aleat. su $\mathbb{Z}^d$ è

ricorrente sse $\sum_n u_{2n} = +\infty$

transiente sse $\sum_n u_{2n} < +\infty$

<u>APPLICAZIONE</u> Per la pass. aleat. su $\mathbb{Z}^d$

$$\sum_n u_{2n} \begin{cases} = +\infty & \text{se } d = 1,2 \\ < +\infty & \text{se } d \geq 3 \end{cases}$$

La dimostrazione del criterio si basa su 2 lemmi

Sia

$$f_{2n} = \mathbb{P}\left(\begin{matrix}\text{primo ritorno in } 0 \\ \text{al tempo } 2n\end{matrix}\right) \qquad n \geq 1$$

$$= \mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0)$$

<u>Lemma 1</u>

$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k}\, u_{2(n-k)} \qquad n \geq 1$$

dim

condiziono al tempo di primo ritorno
+ probabilità totali

$$u_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n}=0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{primo ritorno in } 0\\ \text{al tempo } 2k\end{array}\right) \cdot \underbrace{\mathbb{P}\left(S_{2n}=0 \,\middle|\, \begin{array}{l}\text{primo ritorno in } 0\\ \text{al tempo } 2k\end{array}\right)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_{2k} \, u_{2(n-k)}$$

$\Rightarrow$ è come partire da 0 al tempo $2k$ e ritornarci al tempo $2n$

Lemma 2 (un lemma sulle serie)

Siano

$a_n \geq 0$ con $n \geq 0$ e $a_0 = 1$

$b_n \geq 0$ con $n \geq 1$ tali che

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \, a_{n-k}$$

allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} b_k \geq 1$$

dim

(imbrogliata) se sia $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

sommo la condizione

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k \, a_{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} b_k \, a_{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \, (\underset{\substack{\parallel \\ a_0}}{1} + S)$$

quindi

$$\frac{S}{1+S} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \qquad\qquad \begin{array}{c} S < +\infty \\ \Updownarrow \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k < 1 \end{array}$$

non si può dividere per ∞, ma in fondo è giusto.

<u>Ecco</u> i dettagli:

Sia $$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- $S < +\infty \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k < 1$

In questo caso non c'è alcun imbroglio

$$1 > \frac{S}{1+S} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

- $S = +\infty \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k \geq 1$

Fisso $N > 1$ e sommo n da 1 a N

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} b_k \, a_{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} b_k \underbrace{\sum_{n=k}^{N} a_{n-k}}_{\leq\ \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{a_0} + \sum_{n=1}^{N-k} a_n \ \leq\ 1 + \sum_{n=1}^{N} a_n}$$

ricavo

$$\sum_{k=1}^{N} b_k \geq \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n}{1 + \sum_{n=1}^{N} a_n}$$

ora $N \to \infty$

e ricavo (poiché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \geq 1$$

dim (CRITERIO)

$$\left\{ \begin{matrix} \text{prima o poi} \\ \text{torno in } 0 \end{matrix} \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \text{primo ritorno in } 0 \\ \text{al tempo } 2k \end{matrix} \right\}$$

è unione disgiunta. Per σ-additività ricaviamo

$$\mathbb{P}\left(\begin{matrix} \text{prima o poi} \\ \text{torno in } 0 \end{matrix} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}$$

poiché è una probabilità $\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} \leq 1$

ora lemma 1 + 2 implicano che

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = +\infty \qquad \blacksquare$$

dim (APPLICAZIONE)

- $d = 1$ $\qquad u_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

su $2n$ lanci di monete eque $\# T = \# C = n$

via stirling $\quad n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

$$u_{2n} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi \cdot 2n}}{\left(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \right)^2} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

e $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$

Ex (per gli amanti delle serie)

Usate i criteri di convergenza di vostra conoscenza al posto di Stirling ....

• $d = 2$

descrizione originaria:

tira un dado a 4 facce per decidere dove muoverti

descrizione equivalente:

tira una moneta equa per decidere se spostarti $\updownarrow^{N}_{S}$ oppure $O \longleftrightarrow E$

poi un'altra moneta per decidere in che verso muoversi

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{2k}} \underbrace{\frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}} \cancel{\frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}}$$

le $2k$ mosse $\updownarrow^{N}_{S}$

$2n - 2k$ mosse $O \longleftrightarrow E$

k volte $\uparrow$ k volte $\downarrow$

$$\cdot \underbrace{\frac{1}{2^{2(n-k)}} \binom{2(n-k)}{n-k}}$$

$n-k$ volte $\rightarrow$

$n-k$ volte $\leftarrow$

$$= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!\, k!\, (n-k)!\, (n-k)!}$$

$$= \frac{1}{4^{2n}}\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

(identità ipergeometrica)

$$= \frac{1}{4^{2n}}\binom{2n}{n}\binom{2n}{n} = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}}\Bigg)^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

è il caso $d=1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = +\infty$$

- $d = 3$
  - descrizione originaria: scegli un dado a 6 facce per decidere dove andare
  - descrizione equivalente: tira un dado a 3 facce per decidere quale coordinata spostare e poi una moneta equa per decidere il verso

$$\mathbb{P}(S_{2n}=0) = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \underbrace{\frac{1}{3^{2n}}\,\frac{(2n)!}{(2k_1)!\,(2k_2)!\,(2k_3)!}}$$

$2k_1$ mosse nella direzione 1
$2k_2$ 2
$2k_3$ 3

- $$\underbrace{\frac{1}{2^{2k_1}}\binom{2k_1}{k_1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2^{2k_2}}\binom{2k_2}{k_2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2^{2k_3}}\binom{2k_3}{k_3}}$$

è ce k_1 mosse $\to$
" " $\leftarrow$

coordinata 2 ~~tom~~ è tornata in 0

"
"

$$= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{(2n)!}{k_1!\,k_1!\,k_2!\,k_2!\,k_3!\,k_3!}$$

$$= \frac{1}{6^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \left(\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \right)^2$$

$$= \underbrace{\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\ [\text{è il caso } d=1]} \quad \frac{1}{3^{2n}} \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \left(\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \right)^2$$

Voglio scoprire $\sum_n u_{2n} < +\infty$

quindi mi basta $u_{2n} \leq \cdots$ qualcosa

con qualcosa sommabile

$$\leq \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{1}{3^{2n}} \max_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$$

$$\cdot \underbrace{\sum_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}}_{= 3^n \ [\text{multinomio}]}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{1}{3^{n}} \max_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$$

Ex (già fatto cose simili)

$$\max_{k_1+k_2+k_3=n} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$$ è ottenuto per $k_1=k_2=k_3=\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$

Faccio stirling

$$\sim \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{\left[\left(\frac{n}{3}\right)^{n/3} e^{-n/3} \sqrt{2\pi \frac{n}{3}} \right]^3} \sim 3^n \frac{c}{n}$$

c costante

~~il tutto~~ quindi

$$\mathbb{P}(S_{2n}=0) \lesssim \frac{c}{n^{3/2}}$$ sommabile

- $d>3$ la dimostrazione per $d=3$ funziona in generale, ma la faccio diversa: induzione in d.

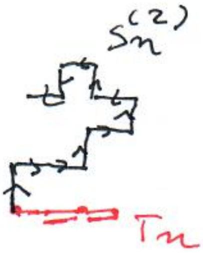
transiente $d=3$ $\Rightarrow$ transiente $d=4$

solo questo per semplicità di esposizione

$S_n^{(4)}$ = Pass. aleatoria in $\mathbb{Z}^4$

$T_n = \Pi\, S_n^{(4)}$

Π → Proiezione ortogonale su $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{Z}^4$



Come evolve T_n?

È un passeggiatore pigro:

con probabilità $\frac{2}{8}$ T_n sta fermo

" " $\frac{1}{8}$ T_n va in uno dei 6 vicini

quindi

T_n visita gli stessi siti di ~~[illegible]~~ $S_n^{(3)}$, solo più lentamente

Perciò T_n transiente $\Leftrightarrow$ $S_n^{(3)}$ transiente

e ciò capita per ipotesi induttiva

ora T_n transiente $\Rightarrow$ $S_n^{(4)}$ transiente $\square$

OSS

Caravenna Dai Pra ~~[illegible]~~ imbrogliano. Per loro

$S_n^{(2)}$ si muove in diagonale

ma se ruoti di $\pi/4$ è come il nostro

$S_n^{(3)}$ ~~per~~ non è quello nostro

va in ~~[illegible]~~ diagonale

$$(0\,0\,0) \to \begin{cases} (1\;1\;1) & 1/6 \\ (-1\;-1\;-1) & 1/6 \\ (1\;1\;-1) & 1/6 \\ (-1\;-1\;1) & 1/6 \\ (1\;-1\;-1) & 1/6 \\ (-1\;1\;1) & 1/6 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(S_{2n}=0)$ fattorizza è più facile

Formulazione equivalente di ricorrenza / transienza

TEO

S_n ricorrente $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(S_n$ ritorna in 0 ∞ volte$) = 1$

S_n transiente $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(S_n$ ritorna in 0 ∞ volte$) = 0$

chiaramente i primi passi (un qualunque numero fissato di passi) non alterano la ricor/trans.

Non c'è più nulla di speciale in 0

se ricorrente colpisce ogni punto ∞ volte

se transiente ogni punto ha prob. > 0 di essere schivato e prob. 0 di essere colpito ∞ volte.

dim ex. Dipende da σ-add. e continuità di $\mathbb{P}$