Campionamento $\boxed{\text{non}}$ ordinato senza rimpiazzo

k estrazioni (fatte insieme senza rimpiazzo)

$k \le n$

chi è lo sp. degli eventi elementari

1° estratta

$\tilde{\Omega} = \left\{ \begin{array}{l} \text{sp eventi elementari} \\ \text{per campionamento } \underline{\text{ordinato}} \\ \text{senza rimpiazzo} \end{array} \right\} = \{ (\omega_1, \ldots, \omega_k) \quad \omega_i \neq \omega_j \quad i \neq j \}$

k-ma estratta

su $\tilde{\Omega}$ c'è $\sim$ (REL. EQUIVALENZA)

$\omega \sim \omega'$ se ω e ω' differiscono per una permutazione

$(1,3,7,4) \sim (4,3,1,7)$

$\Omega = \tilde{\Omega}/\sim \; = \{$ insieme classi di equivalenza $\}$

<u>Alternativamente</u>: posso scegliere un elemento da ogni classe: ordino le palline estratte in modo crescente

$\Omega = \{ (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) \quad 1 \le \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_k \le n \}$

ω_1 = # pallina più piccola estratta
ω_2 = # " seconda più piccola ..
$\vdots$
ω_k = # pallina più grande estratta

tautologicamente:

$$|\Omega| = \#\text{ modi di scegliere } k \text{ oggetti tra } n =: \binom{n}{k}$$

è la mia definizione

Calcoliamo $\binom{n}{k}$

Mi ricordo che $|\tilde{\Omega}| = n(n-1)\cdots(n-k+1)$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

ogni classe di equivalenza di $\tilde{\Omega}$ rispetto a $\sim$ ha esattamente $k!$ elementi

$(1,5,12)$, $(5,1,12)$, $(12,1,5)$
$(1,12,5)$, $(5,12,1)$, $(12,5,1)$

Poiché $|\Omega| = \#$ classi di equivalenza in $\tilde{\Omega}$

ricavo

$$|\tilde{\Omega}| = |\Omega| \cdot k!$$

$$\Rightarrow \quad |\Omega| = \frac{|\tilde{\Omega}|}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

ovvero

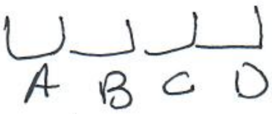
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$ ove $0! = 1$

(se volete usate questa come definizione) ex Dispongo a caso 10 palline in 4 scatole

$\mathbb{P}$(una scatola fissata contiene 5 palline)

— o —

$1, 2, \dots, 10$
palline



scatole

$$\Omega = \{\text{chi finisce dove}\} = \{(\omega_1, \dots, \omega_{10}) \quad \omega_i = A, B, C, D\}$$
$$= \{A, B, C, D\}^{10}$$

$$|\Omega| = 4^{10}$$

Prob. uniforme

$$\mathcal{A} = \{\text{La scatola A contiene 5 palline}\} = \{\omega \in \Omega : |\{i : \omega_i = A\}| = 5\}$$

$$|\mathcal{A}| = \binom{10}{5} \qquad 3^5$$

$\binom{10}{5}$: modi di scegliere le 5 palline da fissare in A

3^5: modi di piazzare le rimanenti 5 palline tra B, C, D

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \binom{10}{5} \frac{3^5}{4^{10}} = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

Ex Scopone (scientifico)

Prob. di

- Un giocatore fissato riceve tutti gli ori
- " " " " il 7 bello
- " " " " i 4 7
- " " " " esattamente un 7
- Uno dei 4 giocatori riceve tutti gli ori
- I 4 giocatori ricevono un 7 a testa

— o —

Per le prime domande

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} \text{scelta di 10} \\ \text{carte tra le 40} \end{matrix} \right\} = \{ \cdots \}$$

scelta di codifica

conviene non ordinato
(gli eventi non dip. dall'ordine con cui avete ricevuto le carte)

$$|\Omega| = \binom{40}{10}$$

- tutti gli ori : è un evento elementare

$$\mathbb{P}(\text{tutti gli ori}) = \frac{1}{\binom{40}{10}}$$

- $$\mathbb{P}(\text{sette bello}) = \frac{\binom{39}{9}}{\binom{40}{10}} = \cdots = \frac{1}{4}$$

Altro argomento (sullo sp. di prob. dei 4 giocatori)

$A_N = \{N \text{ ha il 7 bello}\}, \dots, A_O = \{ \quad \}$

$A_N \cup A_E \cup A_S \cup A_O = \Omega$ disgiunti $\dots \Rightarrow \mathbb{P}(A_N) = 1/4$

- $\mathbb{P}$(i 4 sette) $= \dfrac{\binom{36}{6}}{\binom{40}{10}}$

- $\mathbb{P}$(esatt. un sette)

$\mathbb{P}$(7 ori, ma non altri 7) $= \dfrac{\binom{36}{9}}{\binom{40}{10}}$

$\mathbb{P}$(esatt. un sette) $= 4 \cdot \mathbb{P}$(7 ori, ma non altri)

. . .

Sp. di prob. dei 4 giocatori

$\Omega = \{ \underbrace{(\omega_1^N, \dots, \omega_{10}^N)}, (\omega_1^E, \dots, \omega_{10}^E), \dots$ con tutti i vincoli $\}$

10 carte di N non ~~distinguo~~ distinguo l'ordine

$|\Omega| = \binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10} \cdot \binom{10}{10}$

le 10 carte di N — E — S — O

$= \dfrac{40!}{10!\,10!\,10!\,10!}$

$\mathbb{P}$(uno dei 4 ha tutti gli ori) $= 4\,\mathbb{P}$(N ha tutti gli ori)

[verificare in questo sp. di prob.]

- $\mathbb{P}(\underbrace{\text{un sette a testa}}_{= A})$

$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ sono $4!$ eventi disgiunti

$$A_1 = \left\{ \begin{array}{ll} N & 7\,D \\ E & 7\,C \\ S & 7\,S \\ O & 7\,B \end{array} \right\}, \ldots$$

$$\mathbb{P}(A) = 4!\ \mathbb{P}(A_1)$$

$$|A_1| = \binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}\binom{9}{9} = \frac{36!}{9!\,9!\,9!\,9!}$$

scelte di N

$$\mathbb{P}(A) = 4!\ \frac{\frac{36!}{(9!)^4}}{\frac{40!}{(10!)^4}}$$

Binomio di Newton

Prop

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

con la convenzione $0! = 1$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

dim:

$$(a+b)^n = (a+b)\underbrace{(a+b) \cdots}_{n \text{ volte}} (a+b)$$

svolgo i prodotti

$$a^n \cdot 1$$

$$+ \; a^{n-1} b \cdot \#\text{modi di scegliere } 1 \text{ tra } n$$

$$+ \; \vdots$$

$$+ \; a^{n-k} b^k \cdot \underbrace{\#\text{modi di scegliere } k \text{ tra } n}_{= \binom{n}{k}}$$

$$+ \dots$$

Alternativo:

induz. in n

avete bisogno di

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

"regola di Tartaglia"

da dove viene ?

Fisso un elemento $\left\langle \begin{array}{l} \text{scelto} \rightsquigarrow \text{gli altri hanno } \binom{n-1}{k-1} \text{ modi} \\ \text{non scelto} \rightsquigarrow \text{" " } \binom{n-1}{k} \text{ modi} \end{array} \right.$

~~Alternativa~~

alternativo :

scrivete $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ e vi viene

Principio di esclusione/inclusione

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$$

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - [\,\mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(B\cap C) + \mathbb{P}(A\cap C)\,] + \mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$

$\vdots$

TEO $A_1, \dots, A_n$ eventi

$$\mathbb{P}(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)$$

$$= \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n) - [\,\mathbb{P}(A_1\cap A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_{n-1}\cap A_n)\,] + [\,\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3) + \dots + \quad\,] - \dots + (-1)^{n+1}\,\mathbb{P}(A_1\cap\dots\cap A_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1 < i_2 \dots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k})$$

dim induz. in n

$$\mathbb{P}((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}) = (\text{uso formula per } n=2)$$

$$= \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1})$$

$$- \mathbb{P}(\underbrace{(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}}_{\substack{\| \\ (A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})}})$$

$$= (\text{uso formula per } n=n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \mathbb{P}(A_{n+1})$$

$$- \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_h \le n} \mathbb{P}((A_{j_1} \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_{j_h} \cap A_{n+1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$$

$$- \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2})$$

$$+ \cdots$$

$$\cdots$$

$=$ formula per $n = n+1$

$\boxtimes$

Ex Un mazzo con n chiavi
una apre, le altre no
le provo a caso finché non apro

$\mathbb{P}$(apro al k-mo tentativo) = ?

— o —

* Modalità con rimpiazzo (?)

k estrazioni da $1, .., n$ ① è la chiave che apre

$\Omega = \{ (\omega_1, .., \omega_k) \} = \{1, .., n\}^k$ $|\Omega| = n^k$

$$\mathbb{P}(\text{apro al } k\text{-mo}) = \frac{(n-1)^{k-1} \cdot 1}{n^k}$$ ← sbaglio i primi $k-1$ indovino il k

$$= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$$

$\mathbb{P}$(prima o poi apro) = ?

* Modalità senza rimpiazzo

k estr. ordinate senza rimpiazzo da $1, .., n$

$\Omega = \{ (\omega_1, .., \omega_k) \ \omega_i \neq \omega_j \}$ $|\Omega| = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

$$\mathbb{P}(\text{apro al } k\text{-mo}) = \frac{1}{|\Omega|} (n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$$

sbaglio il primo — sbaglio il $k-1$

$$= \frac{1}{n}$$

era ovvio ← [il primo non è diverso dal secondo, ..]