• Problema della rovina del giocatore

due giocatori $\quad$ A con a € $\quad a, b \in \mathbb{N}$

B con b €

Un torneo con tanti incontri

A vince $\quad$ B da 1 € a A

B " $\quad$ A da 1 € a B

non c'è pareggio

Non sono (necessariamente) bravi uguali

A vince con prob. p

ogni incontro $\quad p \in (0,1)$

Gli ~~gli~~ esiti di incontri diversi sono indipendenti

Giocano fino alla fine, ovvero fino a quando uno dei due non ha più soldi.

Come va a finire?

→ Chi si rovina ~~per~~ (= finisce i soldi) prima? ←

• Il numero di incontri non è fissato all'inizio

• In teoria il gioco potrebbe non avere mai termine

In pratica, ciò capita?

Formulazione "geometrica" e passeggiata aleatoria

S_n, $n \geq 0$ capitale vinto da A dopo n incontri (S_n può essere < 0)

$$S_0 = 0$$

$$S_1 = \begin{cases} 1 & \text{con prob } p \\ -1 & \text{" " } 1-p = q \end{cases}$$

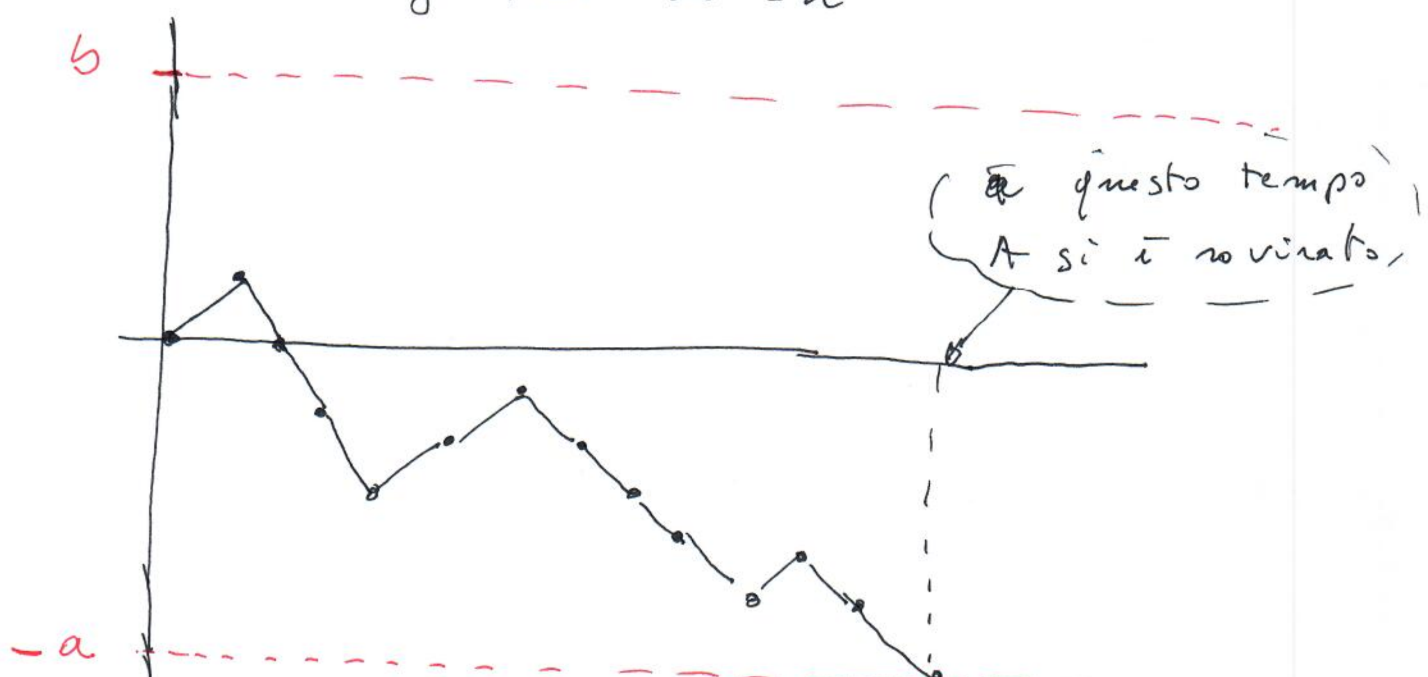
$\vdots$

$$S_n = S_{n+1} + \begin{cases} 1 & \text{con prob } p \\ -1 & \text{" " } q \end{cases}$$

$\vdots$

con gli incrementi di S_n indipendenti (come lanciare una moneta con $p = \text{Prob}(T)$)

Un possibile grafico di S_n



S_n, $n \geq 0$ passeggiata aleatoria su $\mathbb{Z}$

destra prob p sinistra $1-p$

Con questa interpretazione

$\{A$ si rovina$\} = \{$ la pass. aleat. colpisce $-a$ prima di b $\}$

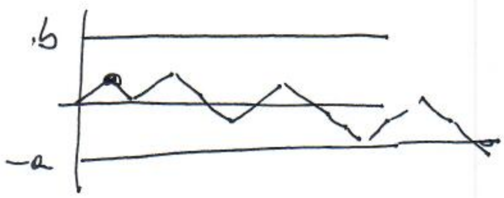
$\{B$ si rovina$\} = \{$ la pass. aleat. colpisce b prima di $-a$ $\}$

$\{$ il torneo non termina $\} = \{$ la pass. aleat. rimane in $(-a, b) \cap \mathbb{Z}$ $\}$

Come si risolve?

Vorrei condizionare al risultato del primo passo ...

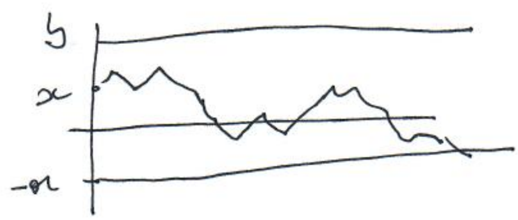
... non è esattamente la situazione di prima



Studio un problema più generale

S_n^x, $n \geq 0$ $x \in \mathbb{Z}$ passeggiata aleatoria che parte da x

$$S_0^x = x \qquad S_{n+1}^x = S_n^x + \begin{cases} +1 & \text{prob } p \\ -1 & \text{" } q \end{cases}$$



rovina di A

$A(x) = \{$ la pass. aleat che parte da x colpisce $-a$ prima di b $\}$

rovina di B

$B(x) = \{$. — — — b prima di $-a$ $\}$

Ora sono in affari per condizionare ed usare probabilità totali

$$\alpha(x) = \mathbb{P}(\mathcal{A}(x)) \qquad \beta(x) = \mathbb{P}(\mathcal{B}(x))$$

ricaviamo una formula per α

$$\alpha(x) = \mathbb{P}(\mathcal{A}(x)) = \mathbb{P}(\text{primo passo } +)\,\mathbb{P}(\mathcal{A}(x) \mid \text{primo passo } +)$$
$$+ \mathbb{P}(\text{primo passo } -)\,\mathbb{P}(\mathcal{A}(x) \mid \text{primo passo } -)$$
$$= p\,\mathbb{P}(\mathcal{A}(x+1)) + q\,\mathbb{P}(\mathcal{A}(x-1))$$
$$= p\,\alpha(x+1) + q\,\alpha(x-1)$$

in effetti va bene se $-a < x < b$

mentre

$$\alpha(-a) = 1 \qquad \alpha(b) = 0$$

Per β ricavo esattamente la stessa equazione, ma con condizioni al bordo diverse

$$\begin{cases} \beta(x) = p\,\beta(x+1) + q\,\beta(x-1) \\ \beta(-a) = 0 \qquad \beta(b) = 1 \end{cases}$$

<u>oss</u> <u>non</u> è una relazione ricorsiva per α e β ma un'eq-ne che devono soddisfare

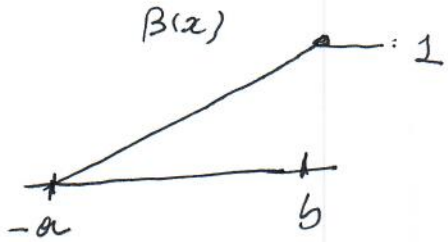
Si tratta ora di risolvere l'eq.ne e poi $x=0$
per rispondere al problema iniziale

(a) $p = q = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \beta(x) = \frac{1}{2}\,\beta(x+1) + \frac{1}{2}\,\beta(x-1) & -a < x < b \\ \beta(-a) = 0 \qquad \beta(b) = 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \beta(x+1) - \beta(x) = \beta(x) - \beta(x-1) & -a < x < b \\ \beta(-a) = 0 \qquad \beta(b) = 1 \end{cases}$$



l'eq.ne dice che β ha incrementi costanti

$\Rightarrow$ è una retta

Soluzione più formale

sia

$$\gamma := \beta(-a+1) - \beta(-a)$$

ma dall'eq.ne ricavo $\beta(-a+2) - \beta(-a+1) = \gamma$

... quindi

$$\beta(x) = \underset{\substack{\| \\ 0}}{\beta(-a)} + \gamma\,(x+a)$$

impongo $\beta(b) = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \dfrac{1}{b+a}$

la soluzione è quindi

$$\beta(x) = \frac{x+a}{b+a} \qquad \text{allo stesso modo} \qquad \alpha(x) = \frac{b-x}{b+a}$$

$$\alpha(x) + \beta(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(\begin{matrix}\text{il gioco non} \\ \text{termina}\end{matrix}\right) = 0$$

per $x=0$

$$\mathbb{P}(A \text{ si rovina}) = \alpha(0) = \frac{b}{b+a}$$

$$\mathbb{P}(B \text{ si rovina}) = \beta(0) = \frac{a}{b+a}$$

non era impossibile prevederlo:

$$\frac{\mathbb{P}(A \text{ rovinato})}{\mathbb{P}(B \text{ rovinato})} = \frac{b}{a}$$

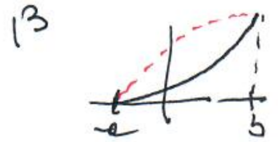
⊙ $p \neq q$ $\quad p+q=1$

$$\begin{cases} \beta(x) = p\,\beta(x+1) + q\,\beta(x-1) & -a < x < b \\ \beta(-a) = 0 \quad \beta(b) = 1 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} p\,[\beta(x+1) - \beta(x)] = q\,[\beta(x) - \beta(x-1)] \\ \beta(-a) = 0 \quad \beta(b) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta(x+1) - \beta(x) = \frac{q}{p}\,[\beta(x) - \beta(x-1)] \\ \beta(-a) = 0 \quad \beta(b) = 1 \end{cases}$$

gli incrementi sono proporzionali $\Rightarrow$ β graficamente



$q < p$

$q > p$

$$\gamma := \beta(-a+1) - \beta(-a)$$

$$\beta(x) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\beta(-a)} + \sum_{y=-a}^{x-1} \underbrace{[\beta(y+1) - \beta(y)]}_{\parallel}$$

$$\frac{q}{p}\,[\beta(y) - \beta(y-1)] = \dots = \left(\frac{q}{p}\right)^{y+a} \gamma$$

$$= \gamma \sum_{y=-a}^{x-1} \left(\frac{q}{p}\right)^{y+a} = \gamma\, \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{x+a}}{1 - \frac{q}{p}}$$

$$\beta(b) = 1 \Rightarrow \frac{\gamma}{1-\frac{q}{p}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{b+a}}$$

ricavo

$$\beta(x) = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{x+a}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{b+a}} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{x}-\left(\frac{q}{p}\right)^{-a}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{b}-\left(\frac{q}{p}\right)^{-a}}$$

$$\beta(0) = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{-a}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{b}-\left(\frac{q}{p}\right)^{-a}}$$

α analoga

Ex $p=q$ e $p\neq q$ non sono due formule diverse

calcolare $\lim_{p\to\frac{1}{2}}$ della ~~a~~ caso $p\neq q$ e

ricavare $p=q$