⊙ FORMULA PROBABILITÀ COMPOSTE

(Regola del prodotto)

esempio

k estrazioni ($k \le b, n$) ordinate senza rimpiazzo

$$\mathbb{P}(\text{esce sempre nero})$$

$$= \underbrace{\frac{n}{b+n}}_{= \text{1ª estratta nera}} \; \underbrace{\frac{n-1}{b+n-1}}_{= \text{2ª estratta n} \,|\, \text{1ª nera}} \cdots \underbrace{\frac{n-k+1}{b+n-k+1}}_{= \text{kª estr. nera} \,|\, 1,2,..k-1 \text{ nere}}$$

In generale

$A_1, \dots, A_n$ eventi con $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_2 \cap \dots \cap A_n \mid A_1)$$

$$= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \cap \dots \cap A_n \mid A_1 \cap A_2)$$

$$= \dots = \mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\, \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cdots A_{n-1})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\Big(A_i \,\Big|\, \underbrace{\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j}_{\text{convengo che non c'è se } i=1}\Big)$$

⑥ FORMULA PROBABILITÀ TOTALI

esempio

Tiro una moneta equa

se T

una estraz.

se C

una estraz.

$$\mathbb{P}(\overbrace{\text{estraggo bianca}}^{=B})$$

(additività di $\mathbb{P}$)

$$= \mathbb{P}(B \cap \underbrace{T}_{\text{moneta rende } T}) + \mathbb{P}(B \cap C)$$

moneta rende C

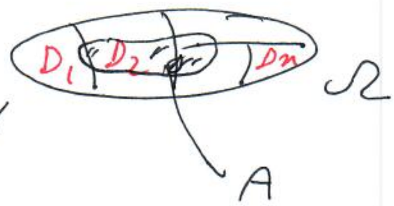
$$= \mathbb{P}(T)\ \mathbb{P}(B|T) + \mathbb{P}(C)\ \mathbb{P}(B|C)$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}$$

In generale $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di prob.

$D_1, \dots, D_n$ partizione di Ω

$$\bigcup_{i=1}^{n} D_i = \Omega \qquad i \neq j \Rightarrow D_i \cap D_j = \emptyset$$



$A \in \mathcal{F}$ evento $\qquad \mathbb{P}(D_i) > 0 \quad \forall i$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(D_i)\ \mathbb{P}(A|D_i)$$

infatti

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(A \cap \overbrace{\Big(\bigcup_{i=1}^{n} D_i\Big)}^{=\,\Omega}\Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap D_i)\Big) \quad \text{(sono disgiunti)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap D_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(D_i) \frac{\mathbb{P}(A \cap D_i)}{\mathbb{P}(D_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(D_i)\, \mathbb{P}(A \mid D_i)$$

FORMULA DI BAYES

esempio tiro moneta equa

se T  una est.

se C  una est.

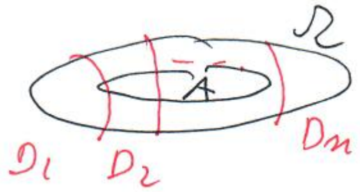
$\mathbb{P}$(testa | pallina estratta = bianca)

$$= \mathbb{P}(T \mid B) = \frac{\mathbb{P}(T \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(T)\, \mathbb{P}(B \mid T)}{\mathbb{P}(B)} \underset{\text{Prob. totali}}{=} \frac{\mathbb{P}(T)\, \mathbb{P}(B \mid T)}{\mathbb{P}(T)\, \mathbb{P}(B \mid T) + \mathbb{P}(C)\, \mathbb{P}(B \mid C)}$$

In generale $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp. prob.

$D_1, \dots, D_n$ partizione di Ω



$$\mathbb{P}(D_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(D_i)\,\mathbb{P}(A \mid D_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(D_j)\,\mathbb{P}(A \mid D_j)}$$

infatti

$$\mathbb{P}(D_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(D_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prob. totali}}}{=} \frac{\mathbb{P}(D_i)\,\mathbb{P}(A \mid D_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(D_j)\,\mathbb{P}(A \mid D_j)}$$

— o —

● Relazione tra prob. condizionata e indipendenza

Prop A, B eventi $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$

A e B indip. $\iff \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(A)$

sapere che A si è verificato non cambia il pronostico su B $\longleftrightarrow$ A, B indip.

dim

A e B indip $\iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

$$\iff \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B)$$

— • —

Via probabilità totali si può usare la prob. condizionata per ricavare la prob di un evento.
Un modo di argomentare tipico della teoria della probabilità.

esempio n lanci di moneta truccata

$\mathbb{P}$(T esce un numero pari di volte)

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k \text{ pari}} \{ \text{Testa esce } k \text{ volte} \} \Big)$$

$$= \sum_{k \text{ pari}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2h} p^{2h} (1-p)^{n-2h}$$

Una risposta più esplicita ?

esercizio: "massaggiare" la somma e ricavare una formula esplicita.

$$q_n = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\substack{\text{su } n \text{ lanci} \\ T \text{ esce un \# pari di volte}}}_{\doteq A_n} \Big)$$

condiziono ad un lancio (il primo)
e uso formula prob. totali

$$q_n = \mathbb{P}(\omega_1 = T)\ \mathbb{P}(A_n \mid \omega_1 = T)$$
$$\qquad + \mathbb{P}(\omega_1 = C)\ \mathbb{P}(A_n \mid \omega_1 = C)$$

ora

$$\mathbb{P}(A_n \mid \omega_1 = T) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{c} \text{su } n-1 \text{ lanci} \\ T \text{ esce un \# dispari} \\ \text{di volte} \end{array} \right)$$

$$\mathbb{P}(A_n \mid \omega_1 = C) = \mathbb{P}\left(\begin{array}{c} \text{su } n-1 \text{ lanci} \\ T \text{ esce un \# pari di volte} \end{array} \right)$$

ricavo

$$q_n = p\,(1 - q_{n-1}) + (1-p)\, q_{n-1}$$
$$= p + (1-2p)\, q_{n-1}$$

devo risolvere questa ricorsione con $q_1 = 1-p$

$$q_2 = p + (1-2p)\, q_1 = p + (1-2p)(1-p)$$

$$q_3 = p + (1-2p)\, q_2 = p + (1-2p)\left[p + (1-2p)\, q_1 \right]$$

$\vdots$

$$q_n = p\left(1 + (1-2p) + \dots + (1-2p)^{n-2} \right) + (1-2p)^{n-1}\, q_1$$

$$= p \sum_{i=0}^{n-2} (1-2p)^i + (1-2p)^{n-1}(1-p)$$

$$= p \, \frac{1-(1-2p)^{n-1}}{1-(1-2p)} + (1-2p)^{n-1}(1-p)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-(1-2p)^{n-1}\right) + (1-2p)^{n-1}(1-p)$$

$$= \frac{1}{2} + \underbrace{(1-2p)^{n-1}}_{\to 0}\left(\frac{1}{2}-p\right)$$

$n \to \infty$ se $p \in (0,1) \Rightarrow |1-2p| < 1$

— o —

<u>altro esempio</u>

Una carta da un mazzo di 40

$$\mathbb{P}(\text{7 DENARI} \mid \text{DENARI}) = \frac{1}{10}$$

10 = # Denari

7 = # 7 Denari

è giusto, ma se usassimo la definizione

$$\mathbb{P}(\text{7 Denari} \mid \text{Denari}) = \frac{\mathbb{P}(\{\text{7 Denari}\} \cap \{\text{Denari}\})}{\mathbb{P}(\text{Denari})}$$

$$= \frac{1/40}{10/40} = \frac{1}{10}$$

Fatto generale

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\quad A \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(A) > 0$

quando

$$B \longmapsto \mathbb{P}(B \mid A)$$

è una probabilità su A, $\mathcal{F}_A$

$$\mathcal{F}_A = \{ B \cap A, \ B \in \mathcal{F} \}$$

infatti

- $\mathbb{P}(A \mid A) = 1$
- $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ $\quad \mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}((B_1 \cup B_2) \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$

$$= \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(B_2 \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$= \mathbb{P}(B_1 \mid A) + \mathbb{P}(B_2 \mid A) \quad \text{è additiva}$$

|| La probabilità condizionata è una probabilità sull'evento condizionante ||

OSS 1 $\quad$ se $\mathbb{P}$ è la prob. unif. su Ω

$\mathbb{P}(\cdot \mid A)$ è la prob. unif. su A

infatti $\quad \mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\frac{|B \cap A|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \dfrac{|B|}{|A|}$

se $B \subset A$

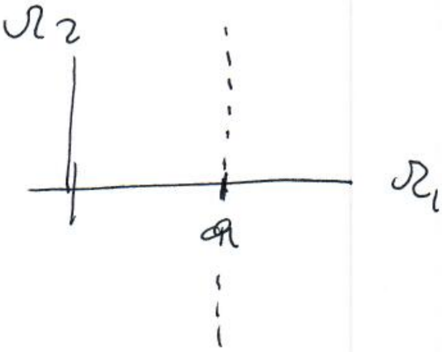
prob. uniforme

OSS 2

se $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ e $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$
(prob. prodotto)

Se A è un evento del tipo

$A = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = a\}$ per un dato $a \in \Omega_1$



$\mathbb{P}(\cdot \mid A)$ è $\mathbb{P}_2$

dove identifico

$\{(a, \omega_2)\ \omega_2 \in B\}$ con $B \subset \Omega_2$

infatti:

$$\mathbb{P}(\ \{(a, \omega_2)\} \mid \omega_1 = a\ )$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\ \{(a, \omega_2)\}\ )}{\mathbb{P}(\ \underbrace{\{\omega : \omega_1 = a\}}_{= \{a\} \times \Omega_2}\ )} = \frac{\mathbb{P}_1(\{a\})\ \mathbb{P}_2(\{\omega_2\})}{\mathbb{P}_1(\{a\})}$$

$$= \mathbb{P}_2(\{\omega_2\})$$

effettivamente nell'esercizio sul numero pari di T abbiamo usato implicitamente questa osservazione