$(\Omega, \mathcal{F})$ $\quad \Omega$ insieme

$\mathcal{F}$ σ-algebra di sottoinsiemi di Ω

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$

supponiamo $\mathbb{P}$ (finitamente) additiva

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Quand'è che $\mathbb{P}$ è anche σ-additiva?

$$i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

- Equivale ad una proprietà di continuità di $\mathbb{P}$. Nel seguente senso.

- $\mathbb{P}$ continua dal basso

  sse A_i, $i = 1, \dots, n, \dots$ $\quad A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$

  ~~eventi~~ (successione crescente di eventi)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n \underbrace{\mathbb{P}(A_n)}$$

↳ è successione (numerica) ↗

- $\mathbb{P}$ continua dal basso

  sse A_i, $i = 1, \dots, n, \dots$ $\quad A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$
  (successione decrescente di eventi)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$$

↳ è successione (numerica) ↘

- $\mathbb{P}$ continua in $\emptyset$

  sse A_i, $i = 1, \dots, n, \dots$ $\quad A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \dots$ $\quad \bigcap_n A_n = \emptyset$

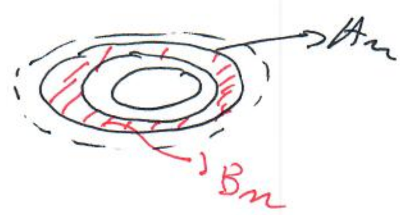
$$\lim_n \mathbb{P}(A_n) = 0$$

TEO Sia $\mathbb{P}$ probabilità (finitamente) additiva su $\mathcal{F}$ (σ-algebra)

$\mathbb{P}$ σ-additiva $\iff$ $\mathbb{P}$ continua dal basso $\iff$ $\mathbb{P}$ continua dall'alto $\iff$ $\mathbb{P}$ continua in $\emptyset$

dim

- $\mathbb{P}$ σ-add $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ cont. dal basso



ho $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset$

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $\dots$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $\dots$

B_i disgiunti

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \overset{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)$$

$$\overset{\text{serie conv.}}{=} \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) \overset{\text{add. finita}}{=} \lim_n \mathbb{P}(A_n)$$

- $\mathbb{P}$ cont. dal basso $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ cont. dall'alto

ho $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$

$B_1 = A_1^c$, $\dots$, $B_n = A_n^c$, $\dots$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

$$\overset{\mathbb{P}\text{ cont. dal basso}}{=} 1 - \lim_n \mathbb{P}(B_n) = \lim_n \left[1 - \mathbb{P}(B_n)\right]$$

$$= \lim_n \mathbb{P}(A_n)$$

- $\mathbb{P}$ cont. dall'alto $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ cont. in $\emptyset$

  è un caso particolare

- $\mathbb{P}$ cont in $\emptyset$ $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ σ-additiva

ho $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ disgiunti

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$B_1 = A \setminus A_1 = \bigcup_{i=2}^{\infty} A_i$$

$$\vdots$$

$$B_n = A \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right] = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$$

$$\vdots$$

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots \qquad e \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup B_{n+1}\right)$$

add. finita

$$\overset{\uparrow}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)}_{\downarrow} + \underbrace{\mathbb{P}(B_{n+1})}_{\searrow 0} \qquad \mathbb{P} \text{ cont. in } \emptyset$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Altra caratterizzazione

<u>TEO</u> Sia $\mathbb{P}$ (finitamente) additiva su $\mathcal{F}$ σ-algebra

$\mathbb{P}$ σ-additiva $\iff$ $\mathbb{P}$ σ-subadditiva

[qualunque A_i $i=1,\dots,n,\dots$
vale
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \quad]$$

<u>dim</u>

$\Rightarrow$ ho $A_1, A_2, \dots, A_n$, non necessariamente disgiunti

$B_1 = A_1$, $B_2 = (A_2 \cup A_1) \setminus B_1$, $\dots$, $B_n = (A_1 \cup \dots \cup A_n) \setminus \cancel{B_{n-1}} \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$

$i \neq j$ $\quad B_i \cap B_j = \emptyset$ $\quad$ e $\quad \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

/// B_1
∴ B_2
⁂ B_3

$B_i \subset A_i$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \overset{\sigma \text{ add.}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)$$

$$\underset{\text{monotonia } \mathbb{P}}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

$\Leftarrow$ A_i, $i=1,\dots,n,\dots$ disgiunti.

Basta $\quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \underset{\text{monotonia di } \mathbb{P}}{\geq} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \underset{\text{add. finita}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Passo al limite $n \to \infty$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

$\boxtimes$

• Ω insieme $\mathcal{F}$ σ-algebra di sottoinsiemi di Ω

perché non dichiariamo comunque

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{ \text{tutti i sottoinsiemi di } \Omega \}$$

Se Ω finito (o numerabile) va bene ma se Ω più che numerabile ci sono dei problemi, in effetti insormontabili

"Scegli un numero reale a caso in $[0,1)$"

$\Omega = [0,1)$ vogliamo introdurre qui la prob. uniforme

~~Senza~~ ma non possiamo dichiarare la prob. sui singoletti,

evidentemente $\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$

vogliamo invece $\quad 0 \le a < b \le 1$

$$\mathbb{P}(\{\omega : \; a \le \omega < b\}) = b - a$$

$$\mathbb{P}([0, \tfrac{1}{2}]) = \tfrac{1}{2}, \quad \mathbb{P}([\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}]) = \tfrac{1}{4}, \; \ldots$$

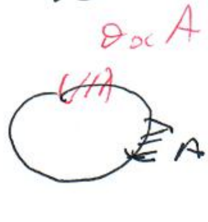
introduco la traslazione

$x \in [0,1]$

$$\theta_x \omega = \omega + x \quad (\text{mod } 1)$$

$A \subset \Omega$

$$\theta_x A = \{ \omega + x, \; \omega \in A \}$$



dichiariamo 12

$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$

invariante per traslazioni sse

$\forall A \subset \Omega \quad \forall x \in [0,1) \qquad \mathbb{P}(\vartheta_x A) = \mathbb{P}(A)$

questa proprietà dovrebbe caratterizzare la probabilità uniforme su Ω

È così, salvo il baco irrimediabile

TEO

$\nexists\ \mathbb{P}$ σ-add, inv. per traslazioni su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

come si cura ?

$\mathcal{P}(\Omega)$ è troppo grande.

Invece $\mathcal{F}$ = σ algebra generata dagli intervalli $= \sigma \{ [a,b) \ \ 0 \le a < b \le 1 \}$

funziona ... non è oggetto di questo corso

Discuto invece la dimostrazione del teorema di non esistenza

Dipende da

ASSIOMA DELLA SCELTA

Sia E_α collezione arbitraria di insiemi non vuoti

si può formare un insieme E prendendo un elemento da ogni E_α

OSS Se E_α è una collezione numerabile (1

e ovvio .. E_1 non vuoto $\rightsquigarrow$ ~~sc~~ scelgo $e_1 \in E_1$

E_2 " " $\rightsquigarrow$ $e_2 \in E_2$

Se sono più che numerabili come faccio a garantirmi di non aver lasciato dei "buchi" ?

Non posso garantirmi nulla, è un assioma in più

dim

su $\Omega = [0,1)$ introduco $\sim$ (relaz. equiv.) dichiarando

$\omega \sim \omega'$ sse $\omega' - \omega \in \mathbb{Q}$ (razionali)

è chiaramente relaz. equivalenza

ad esempio $[0,1) \cap \mathbb{Q} \sim 0$

Partiziono Ω in classi di equivalenza

$\Omega = \bigcup_\alpha E_\alpha$ $\quad E_\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \omega \in \Omega \text{ della forma} \\ \overline{\omega}_\alpha + r \quad r \in \mathbb{Q} \\ \text{per un opportuno } \overline{\omega}_\alpha \in \Omega \end{array} \right\}$

ogni E_α è numerabile

$\# E_\alpha$ è più che numerabile

Per l'assioma della scelta (non numerabile) posso formare un insieme E prendendo un elemento da ogni E_α

con questo E ci organizziamo un assurdo

Numeriamo i razionali in $[0,1)$

$0=r_0, r_1, \dots$

dichiamo $F_i = \vartheta_{r_i} E$

$\{F_i\}$ è una partizione di Ω

- $\bigcup_i F_i = \Omega$

  infatti se $\omega \in \Omega$ sta in qualche classe, ovvero ha la forma

  $\omega = x + r$ con $x \in E$, $r \in \mathbb{Q}$

  $\Rightarrow$ $\omega \in F_i$ per un qualche i

- $i \neq j$ $F_i \cap F_j = \phi$

  sia $\omega \in F_i \cap F_j$ $\exists\, x, y \in E \overset{x \neq y}{\vee} r_i, r_j \in \mathbb{Q}$ t.c.

  $$\omega = x + r_i = y + r_j$$

  $\Rightarrow$ $x - y = r_j - r_i \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $x \sim y$

  NO: ho preso un elemento per ciascuna classe

Ora

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) \overset{\sigma\text{-add}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\vartheta_{r_i} E) \underset{\substack{\text{inv. per} \\ \text{trasl.}}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E)$$

Assurdo

se $\mathbb{P}(E)=0 \Rightarrow \sum \mathbb{P}(E)=0$, se $\mathbb{P}(E)>0 \Rightarrow \sum \mathbb{P}(E)=\infty$

4. PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Esempio

2 estrazioni senza rimpiazzo

$\mathbb{P}(2^a \text{ estratt nera}) = ?$

numeriamo le palline
∴ prob. uniforme

$|\{\text{seconda estratta nera}\}| = 3 \cdot 4$

$|\Omega| = 5 \cdot 4$

$\mathbb{P}(2^a \text{ estra nera}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

• Altro modo di argomentare

due storie (mutuamente esclusive)

< 1^a estr B e poi 2^a estr. N
2^a " N " " N

$\mathbb{P}(1^a\ B) = \frac{2}{5}$ $\qquad \mathbb{P}(1^a\ N) = 3/5$

Sapendo 1^a estr B $\qquad \mathbb{P}(2^a\ N) = \frac{3}{4}$

Sapendo 1^a estr N $\qquad \mathbb{P}(2^a\ N) = \frac{2}{4}$

Quindi

$$\mathbb{P}(2^a \text{ estr. } N) = \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}}_{\uparrow\ 1^a \text{ storia}} + \underbrace{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}}_{\uparrow\ 2^a \text{ storia}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ SPAZIO DI PROBABILITÀ

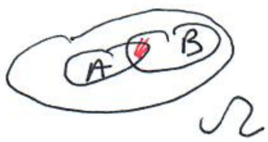
Supponiamo di sapere che $A \in \mathcal{F}$ si è verificato (ma non conosciamo il dettaglio dell'esito elementare)

Come rivedo il pronostico sul verificarsi di un altro evento B?

<u>DEF</u> SIA $A \in \mathcal{F}$ T.C. $\mathbb{P}(A) > 0$

La probabilità di B <u>sapendo</u> A (condizionata a A) è

$$\mathbb{P}(B \mid A) := \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$



misuro (con $\mathbb{P}$) $A \cap B$ e normalizzo non a tutto Ω ma solo a quello che so essere successo (ovvero A)

<u>Nell'esempio di prima</u>

$$\mathbb{P}(2^a \text{ estr. } N \mid 1^a \text{ estr } N) = \frac{\frac{3 \cdot 2}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{2}{4}$$

$$\mathbb{P}(2^a \text{ estr } N \mid 1^a \text{ estr } B) = \frac{3 \cdot 2/20}{8/20} = \frac{3}{4}$$

Esempio

Incontro una mamma con bambino (maschio) se mi dice:

- "Ho due figli" $\mathbb{P}(\text{entrambi } M) = ?$

- "Questo è il più grande, poi ho un altro figlio" $\mathbb{P}(\text{entrambi } M) = ?$

Spazio di probabilità (scritti in ordine di età)

$\Omega = \{MM, MF, FM, FF\}$ Prob. uniforme

$$\mathbb{P}(MM \mid \text{almeno un maschio}) = \mathbb{P}(MM \mid \{MM, MF, FM\}) = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

$$\mathbb{P}(MM \mid \text{il più grande è } M) = \mathbb{P}(MM \mid \{MM, MF\}) = \frac{1/4}{2/4} = 1/2$$