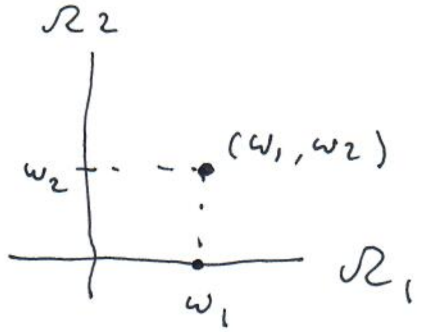
3. SPAZI DI PROBABILITÀ PRODOTTO E INDIPENDENZA DI EVENTI

$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1)$ $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2)$

due sp. di prob.

Modello relativo all'esp. congiunto

⊙ $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{ (\omega_1, \omega_2) \quad \omega_1 \in \Omega_1, \ \omega_2 \in \Omega_2 \}$

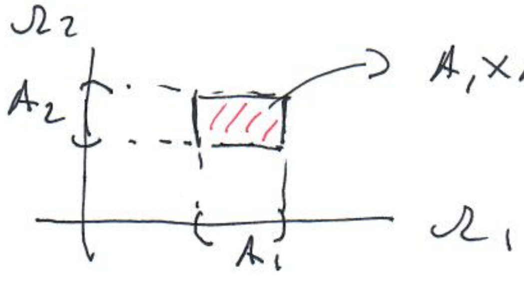


⊙ Algebra degli eventi = ?

in Ω ci sono eventi particolari, eventi prodotto

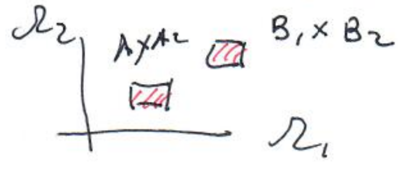
$A_1 \in \mathcal{A}_1 \quad A_2 \in \mathcal{A}_2$

$A_1 \times A_2 = \{ (\omega_1, \omega_2) \in \Omega : \ \omega_1 \in A_1, \ \omega_2 \in A_2 \}$

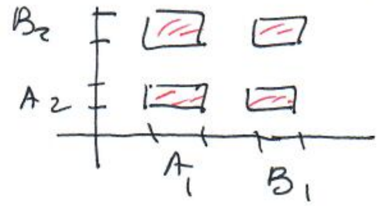


$A_1 \times A_2$ = rettangolo

evidentemente la collezione dei rettangoli (come sottoinsiemi di Ω) non è un'algebra



$(A_1 \times A_2) \cup (B_1 \times B_2)$ <u>NON</u> è un rettangolo



$(A_1 \cup B_1) \times (A_2 \cup B_2)$

dichiaro allora

$\mathcal{A} =$ algebra generata dai rettangoli $=$ più piccola algebra che contiene gli eventi del tipo $A_1 \times A_2$ con $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$

notazione

$\overset{\gamma}{=} \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$

<u>ex</u> $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ algebre di eventi $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ è ancora un algebra

<u>invero</u> lo stesso per intersezioni arbitrarie (anche ~~non~~ più che numerabili)

<u>Per noi</u>

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega) = \mathcal{P}(\Omega_1) \times \mathcal{P}(\Omega_2)$$

come al solito

⊙ Probabilità $= ?$

probabilità prodotto, non è evidentemente l'unica possibilità; è adatta nella modellizzazione di due esperimenti che non si influenzano dichiaro $\mathbb{P}$ sui rettangoli $\mathbb{P} : \mathcal{A} \mapsto [0,1]$

$$\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}_1(A_1) \cdot \mathbb{P}_2(A_2) \qquad A_1 \in \mathcal{A}_1, \; A_2 \in \mathcal{A}_2$$

poi $\mathbb{P}$ è estesa a tutto $\mathcal{A}$
per additività $\qquad \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ (come notazione)

se $A = \bigcup_i (A_1^i \times A_2^i)$ UNIONE DISGIUNTA

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A_1^i \times A_2^i)$$
$$= \sum_i \mathbb{P}(A_1^i)\, \mathbb{P}(A_2^i)$$

<u>per noi</u>:

se Ω_1 e Ω_2 finiti (basta numerabili)
$\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ sono caratterizzate dal valore sui singoletti ..

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) \cdot \mathbb{P}_2(\{\omega_2\})$$

<u>OSS</u> (banale ma utile)

$\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ prob. unif su Ω_1, Ω_2 $\Rightarrow$ $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ è la prob. unif. su $\Omega_1 \times \Omega_2$

<u>infatti</u>

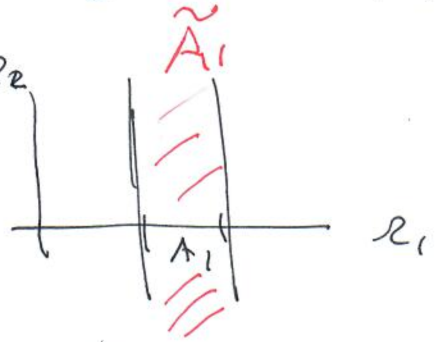
$$|\Omega_1 \times \Omega_2| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2|$$

condizioni di compatibilità

in $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ considero eventi che decido guardando solo il risultato ω_1

ovvero eventi del tipo

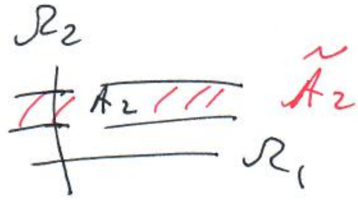
$$\tilde{A}_1 = A_1 \times \Omega_2 \qquad A_1 \in \mathcal{A}_1$$



$$\mathbb{P}(\tilde{A}_1) = \mathbb{P}_1(A_1)$$

allo stesso modo

$$\tilde{A}_2 = \Omega_1 \times A_2$$



$$\mathbb{P}(\tilde{A}_2) = \mathbb{P}_2(A_2)$$

calcoliamo

$$\mathbb{P}(\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2) = \mathbb{P}\left((A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2) \right)$$

$$= \mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}_1(A_1)\ \mathbb{P}_2(A_2)$$

$$= \mathbb{P}(\tilde{A}_1) \cdot \mathbb{P}(\tilde{A}_2)$$

PROB $\cap$ = PRODOTTO PROB

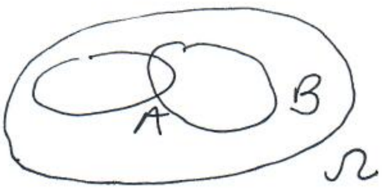
SI MERITA UN NOME

DEF $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ SP. DI PROB

$A, B \in \mathcal{A}$ EVENTI DICO CHE SONO **INDIPENDENTI**

SSE $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Euristica. Supponiamo di sapere che A si è verificato e voglio usare questa informazione per predire meglio il verificarsi o no di B.



Se A e B sono indipendenti non ho però alcun guadagno di informazione dal sapere che A si è verificato.

Il calcolo di prima:

se $\mathbb{P}$ è prodotto, A si riferisce all'esp 1, B " " " 2

$\Rightarrow$ A e B sono indip.

Esempio: Una carta da un mazzo di 40

$A = \{ \text{è DENARI} \}$ $\quad B = \{ \text{è UN SETTE} \}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{\text{SETTE DENARI}\}) = \frac{1}{40} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Sapere che è denari non cambia il pronostico che sia sette

Altro esempio

2 estrazioni ordinate

$A = \{ 1^{a} \text{ estr.} = Bi \}$ $\qquad B = \{ 2^{a} \text{ estr} = Ne \}$

SE CON Rimpiazzo A e B sono indip.
(è la prob. prodotto)

Se senza rimpiazzo A e B NON sono indip

— o —

Indipendenza di tre eventi

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$A, B, C \in \mathcal{A}$ quando dico che sono (collettivamente) indipendenti ?

← non sarà mai più detto !

Due possibilità

(I) A coppie

A, B ; A, C ; B, C sono indip

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, $\quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$, $\quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$

(II) La terna

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

domande:

$$\text{(I)} \overset{?}{\Rightarrow} \text{(II)} \qquad \text{(II)} \overset{?}{\Rightarrow} \text{(I)}$$

I $\not\Rightarrow$ II

esempio   dado 4 facce : R, B, V, R/B/V

$\mathcal{R} = \{ \text{vedo } R \}$ $\mathcal{B} = \{ \text{vedo } B \}$ $\mathcal{V} = \{ \text{vedo } V \}$

$$\mathbb{P}(\mathcal{R}) = \mathbb{P}(\mathcal{B}) = \mathbb{P}(\mathcal{V}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\mathcal{R} \cap \mathcal{B}) = \mathbb{P}(\mathcal{R} \cap \mathcal{V}) = \mathbb{P}(\mathcal{B} \cap \mathcal{V}) = 1/4$$

$$\mathbb{P}(\mathcal{R} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{V}) = 1/4 \neq \mathbb{P}(\mathcal{R}) \cdot \mathbb{P}(\mathcal{B}) \cdot \mathbb{P}(\mathcal{V}) = \frac{1}{8}$$

II $\not\Rightarrow$ I   (ex)

definizione giusta è   I + II

Def: $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ eventi

sono indipendenti sse presa comunque una sotto famiglia $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$

$i_1 \neq i_2 \dots$ $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$

vale

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

intersezione (tra eventi)   prodotto (tra numeri)

ex: $A \in \mathcal{A}$ evento.

Quando capita che A è indip. da A ?

- SCHEMA DI BERNOULLI

esperimento binario ($\sim$ lancio di moneta)
ripetuto n volte

$$\Omega_1 = \{T, C\} \quad \text{o meglio} \quad \Omega_1 = \{0, 1\}$$

$\mathbb{P}_1$ prob. su Ω_1 <u>non</u> necessariamente uniforme

$$p = \mathbb{P}_1(\{1\}) \qquad q = 1 - p = \mathbb{P}_1(\{0\})$$

p = prob. successo $\in [0,1]$ parametro
(uniforme se $p = 1/2$ "moneta equa")

Ripeto n volte e utilizzo prob. prodotto
(penso che i diversi lanci siano indipendenti)

$$\Omega = \Omega_n = \{0,1\}^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \quad \omega_i = 0,1\}$$

$\mathcal{A}$ = tutti i sottoinsiemi di Ω

$\mathbb{P} = \mathbb{P}_n$ prob. prodotto

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_n\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_1(\{\omega_i\})$$

<u>$n=1$</u>

0	$q = 1-p$
1	p

<u>$n=2$</u>

00		q^2
01	10	qp
11		p^2

<u>$n=3$</u>

000			q^3
001	010	100	pq^2
110	101	011	p^2q
111			p^3

$n = n$

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) = p^{\#1} q^{\#0} = \text{(troppo vantaggio codifica con 0 e 1)}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} \, q^{n - \sum_{i=1}^n \omega_i}$$

distribuzione binomiale

$(\Omega, \mathbb{P})$ n lanci di moneta "p-truccata"

$$A_k = \{ \# \text{ successi } (=\text{Testa}) = k \} = \{ \omega \in \Omega : \sum_{i=1}^n \omega_i = k \}$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

$A_0 = \{(0, \dots, 0)\}$ $A_n = \{(1, 1, \dots, 1)\}$

$$|A_k| = \binom{n}{k} = \text{scelgo i } k \text{ lanci che hanno reso T}$$

se $\omega \in A_k$ $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^{\#1} q^{\#0} = p^k q^{n-k}$

quindi

$$\mathbb{P}(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$[p + q = 1]$

OSS:

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{n} A_k \quad \text{e} \quad A_h \cap A_k = \emptyset \quad h \neq k$$

è una partizione di Ω

deve quindi capitare (per additività di $\mathbb{P}$)

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

verifico $\longrightarrow$ (binomio Newton)

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$$

ex

10 estraz. con rimpiazzo

$$\mathbb{P}(7 \text{ volte } \bullet \text{ e } 3\ \circ)$$

$$= \binom{10}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^7 \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

schema di Bernoulli

Se facciamo $n = \infty$ (∞ lanci di moneta p-truccata) è un modello ricchissimo - Ci si può fare tutta la prob. ...