2. SIGNIFICATO OPERATIVO DELLA PROBABILITÀ

ovvero: Relazione tra una teoria matematica e il mondo concreto

Matematica

- enti primitivi
- assiomi ---> TEOREMI
- regole di inferenza

↕ REGOLE DI CORRISPONDENZA

Fisica teorica

- definizione operativa enti primitivi
- idealizzazione fenomeno fisico
- scelta di un modello matematico "semplice"

PREDIZIONI QUANTITATIVE DI FENOMENI REALI

esperimenti

Esempi

Geometria euclidea (> 2 millenni)	punti, rette, assiomi di Euclide	definizione operativa "ovvia" di distanze, ~~rette~~, angoli, ...
Meccanica Newtoniana (~ 500 anni)	punti materiali, Eq.ni di Newton	masse con bilance, forze con dinamometro ..
Teoria della probabilità (< 1 secolo)	Eventi, Assiomi di additività e indipendenza	definizione operativa di probabilità

Significato operativo probabilità
(si può fare un esperimento e decidere se le predizioni fatte sono in accordo con la realtà)

A evento $\qquad \mathbb{P}(A)$ prob.

Ripeti l'esperimento – nelle stesse condizioni – tante volte

$$\mathbb{P}(A) \simeq \frac{\#\text{ volte } A \text{ accade}}{\#\text{ esperimenti}}$$

① Tiro una moneta: $\mathbb{P}(T) = 50\%$

② Previsioni meteorologiche $\mathbb{P}(\text{oggi piove}) = 30\%$

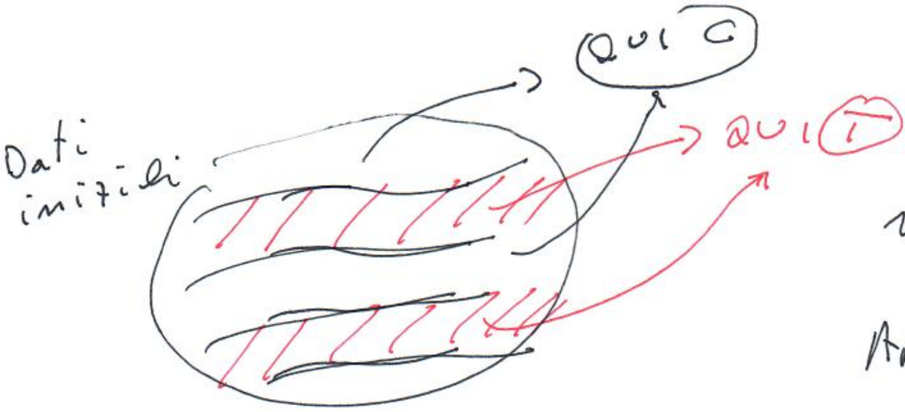
③ Corsa ippica $\mathbb{P}(\text{Fulmine vince}) = 20\%$

1. Il senso operativo sembra ovvio:
lancio tante volte la ~~moneta~~ moneta T esce metà delle volte

eppure:

- con un pò di allenamento si riesce a barare
- il moto della moneta non ha nulla di misterioso: dai dati iniziali (posizione e velocità) risolvete le ~~eq~~ eq.ni di Newton e sapete dove finisce la moneta

Come si concilia il determinismo newtoniano con l'aleatorietà della moneta ?



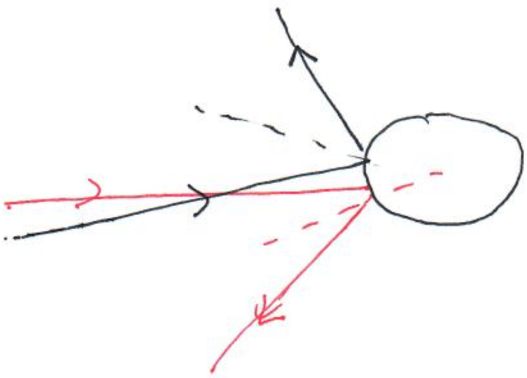
Per simmetria moneta (approssimata)

AREA(T) = AREA(C)

qui è più "facile" barare !

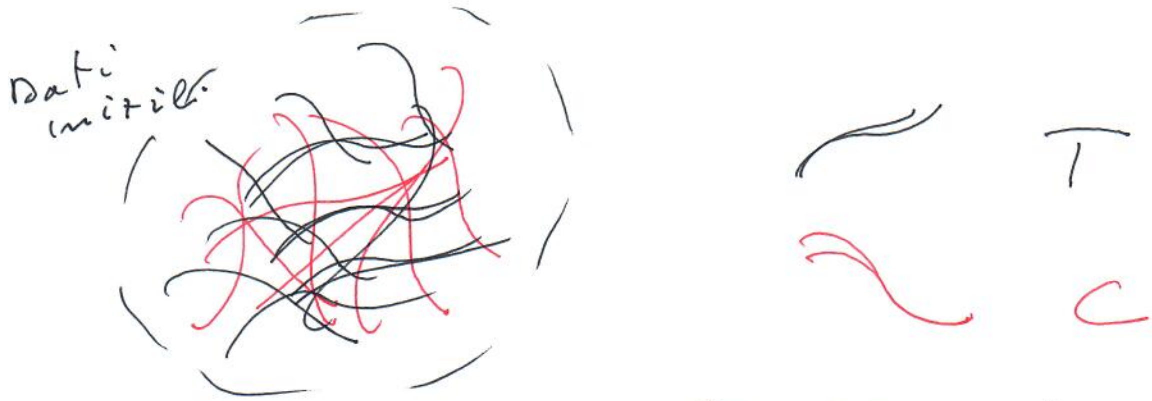
In effetti ci sono pure gli urti (moneta che rimbalza)

cambia tutto :



"Dipendenza sensibile dai dati iniziali"

Il disegno diventa tipo così :



ma sempre AREA(T) = AREA(C)

Qui vi sfido a barare

Si concilia benissimo:

$\mathbb{P}(T) = 1/2$ perché metà dei dati iniziali (misurati con l'accuratezza) conducono a T

2. $\mathbb{P}(\text{OGGI PIOVE}) = 30\%$

Appare difficile attribuirgli un senso operazionale (= si può verificare o contraddire con un esperimento)

c'è un solo oggi!

Non potrò mai fare l'esperimento più di una volta

Eppure:

non è tanto diverso dalla moneta.

Assumo modelli per i fenomeni atmosferici e misuro i dati iniziali solo con una certa approssimazione.

È sicuro [salvo che nessuno lo sa dimostrare] che c'è dipendenza sensibile ~~dalle~~ dai dati iniziali

30% è la frazione dei dati iniziali che corrispondono a pioggia

3. $\mathbb{P}(\text{FULMINE VINCE}) = 20\%$ Non assumo un modello

I cavalli sono ancora troppo difficili ...

D. RUELLE "CAOS E CASO" Bollati Boringhieri

2. CALCOLO COMBINATORIO

Principio fondamentale

Dati n elementi $a_1, \dots, a_n$
e m elementi $b_1, \dots b_m$
si possono formare $n \cdot m$ coppie (ordinate)
prendendo un elemento dagli a e uno dai b

Prop A, B insiemi finiti

$$A \times B = \{ (a, b) \quad a \in A, \ b \in B \}$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

dim $|A| = n \quad |B| = m$

$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} a_1 b_1 & & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & & a_2 b_m \\ \vdots & & \\ a_n b_1 & & a_n b_m \end{matrix} \right\}$$

$$|A \times B| = n \cdot m$$

Esempio r palline (diverse)
n scatole

In quanti modi si possono mettere le palline nelle scatole

① ⋮ ⓡ

$\sqcup \ \sqcup \ \sqcup \ \dots \ \sqcup$
1 2 ... n

ω_1 = scatola pallina 1
⋮
ω_r = " " r

$$\Omega = \{ (\omega_1, \dots, \omega_r) \quad \omega_i = 1, \dots, n \} \qquad |\Omega| = n^r$$

Ex

Tiro un dado 6 volte

$\mathbb{P}$(almeno un 6)

Prob. uniforme $\quad \Omega = \{1,..,6\}^6$

$$|\Omega| = 6^6$$

$$\mathbb{P}(\text{nessun } 6) = \frac{|\{1,\dots,5\}^6|}{|\Omega|} = \frac{5^6}{6^6}$$

$$\mathbb{P}(\text{almeno un } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \simeq 0.66$$

Permutazioni

Ω insieme $\quad |\Omega| = n$

Una permutazione di Ω è la scelta di un ordine tra gli elementi di Ω

Formalmente

$$\varphi : \{1,..,n\} \to \Omega \quad \text{biiezione}$$

$$\varphi(1) = \text{PRIMO}, \dots, \quad \varphi(n) = \text{ULTIMO}$$

Prop $\quad |\Omega| = n$

$$\#\ \text{PERMUTAZIONI DI } \Omega = n! = n(n-1)\cdots 1$$

dim $\quad$ induzione in n

$n = 1 \qquad \#\ \text{PERM.} = 1$

$\vdots$

$$n = n \qquad \underset{\text{DI } n}{\#\ \text{PERM}} = \underbrace{n}_{\text{SCELTE DEL PRIMO}} \cdot \underset{\text{DI } n-1}{\#\ \text{PERM.}}$$

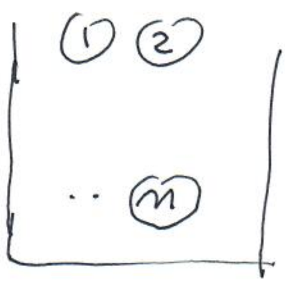
$\square$

Esempio

anagrammi di PIPPO

$$= \frac{5!}{3!}$$

Campionamento ordinato con rimpiazzo



n PALLINE numerate

k estrazioni con rimpiazzo
(guardo la pallina e la rimetto dentro)

ω_1 = # PALLINA 1^a estratta

n, k interi arbitrari

ω_2 = # 2^a "

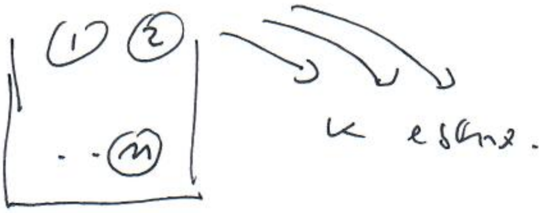
$\vdots$

ω_k = # k^{ma} "

$$\Omega = \{ (\omega_1, \dots, \omega_k) \quad \omega_i = 1, \dots, n \} = \{1, \dots, n\}^k$$

$$|\Omega| = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ volte}} = n^k$$

campionamento ordinato senza rimpiazzo



n palline numerate
k estrazioni senza rimpiazzo (non rimetto dentro)

$\omega_1 = \#$ pallina 1ª estr
$\vdots$
$\omega_k = \#$ pallina k^{ma} estratta

$k \leq n$

$$\Omega = \{ (\omega_1, .., \omega_k) \in \{1, .., n\}^k : \omega_i \neq \omega_j \text{ se } i \neq j \}$$

$$|\Omega| = \underbrace{n}_{\substack{\text{scelte}\\ 1^a \text{ estr}}} (n-1) \cdots \underbrace{(n-k+1)}_{\substack{\text{scelte}\\ k\text{-ma}\\ \text{estratta}}}$$

[se volete induzione in ~~n~~ n

$$|\Omega_{n,k}| = n \, |\Omega_{n-1,k-1}| \quad]$$

$$|\Omega_{1,1}| = 1$$

Ex 7 persone in un ascensore che fermano in un palazzo di 10 piani

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{tutti scendono} \\ \text{a piani diversi}\end{array} \right)$$

$$\Omega = \{ (\omega_1, .., \omega_7) \ \omega_i = 1, .., 10 \} = \{ \text{chi scende dove} \}$$

$$A = \{ \omega : \ \omega_i \neq \omega_j \ i \neq j \}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10 \cdot 9 \cdots 4}{10^7} \simeq 0.06$$