# 0. PROBLEMA DEI COMPLEANNI

Tra 25 persone qual'è la probab. che almeno due abbiano il compleanno lo stesso giorno?

① Distribuzione nascita singolo individuo:

$$\mathbb{P}(\text{tizio nato } i) = \text{costante} = \frac{1}{365}$$

$$i = 1, \dots, 365$$

PROB. UNIFORME

② Distribuzione di coppia:

$$\mathbb{P}(\text{tizio nato } i, \text{ caio nato } j)$$

$$= \mathbb{P}(\text{tizio nato } i) \cdot \mathbb{P}(\text{caio nato } j)$$

INDIPENDENZA

$$i, j = 1, \dots, 365$$

⋮

ⓚ Distribuzione di K-PLA

$$\mathbb{P}(\text{tizio}_1 \text{ nato } i_1, \text{ tizio}_2 \text{ nato } i_2, \dots)$$

$$= \mathbb{P}(\text{tizio}_1 \text{ nato } i_1) \cdot \mathbb{P}(\text{tizio}_2 \text{ nato } i_2) \cdots$$

Formulazione come estrazione da un'urna


URNA CON $N = 365$ PALLINE

$K = 25$ ESTRAZIONI
(CON REINSERIMENTO)

$\omega_1 =$ # PALLINA 1ª estr.

$\omega_2 =$ #

$\vdots$

$\omega_k =$ # $\quad$ $k$-ma estratta

Assumo deciso

$$\mathbb{P}(\omega_1 = i_1, \dots, \omega_k = i_k) = \frac{1}{N^k} \qquad i_1, \dots, i_k = 1, \dots, N$$

(PROB. UNIFORME)

$A = \{$ LA STESSA PALLINA È ESTRATTA ALMENO 2 VOLTE $\}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \frac{|A|}{N^k}$$

Rimane da contare $|A| = ?$

<u>Esempio</u> $N = 3$ $\quad k = 2$

| | | |
|---|---|---|
| <u>11</u> | 12 | 13 |
| 21 | <u>22</u> | 23 |
| 31 | 32 | <u>33</u> |

$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{9}$

TRUCCO (SPESSO UTILE)

$|A|$ è complicato, ma $A^c$ meno

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

$$A^c = \left\{ \begin{array}{l} \text{NON ESTRAGGO LA} \\ \text{STESSA PALLINA DUE} \\ \text{VOLTE DI SEGUITO} \end{array} \right\} = \left\{ \omega : \begin{array}{l} \omega_i \neq \omega_j \\ i \neq j \end{array} \right\}$$

$$|A^c| = \underbrace{N}_{\substack{\text{scelte} \\ 1^a \text{ PALLINA}}} \cdot \underbrace{(N-1)}_{\substack{\text{scelte } 2^a \\ \text{pallina}}} \cdots \underbrace{(N-k+1)}_{\substack{\text{scelte } k\text{-ma} \\ \text{PALLINA}}}$$

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{N^k}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{N^k}$$

<u>SE $N = 365$</u>

| $k$ | 4 | 16 | 22 | 23 | 40 | 63 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(A)$ | 0.016 | 0.28 | 0.42 | 0.50 | 0.89 | 0.99 |

# I. MODELLO PROBABILISTICO

TRE INGREDIENTI

① SPAZIO EVENTI ELEMENTARI
(O SPAZIO campionario)

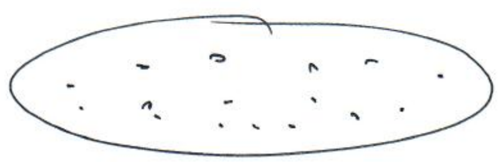
$$\Omega = \{ \text{POSSIBILI RISULTATI ESPERIMENTO} \}$$

ESEMPI

- LANCIO una moneta $\qquad \Omega = \{T, C\}$
- " DADO $\qquad \Omega = \{1, \dots, 6\}$
- chiedo la data di nascita a 25 persone $\qquad \Omega = \{ \dots \}$
- misuro posizione e velocità delle molecole in questa stanza $\qquad \Omega = \Lambda^N \times \mathbb{R}^{3N}$

$\Omega$ : INSIEME (SENZA ALCUNA STRUTTURA AGGIUNTIVA)

= PATATA



$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$$

Per noi: spesso, ma non sempre,

$\Omega$ insieme finito

## ② (ALGEBRA DEGLI) EVENTI

EVENTO ↔ DOMANDA BINARIA SUL RISULTATO ESPERIMENTO

Esempi

- moneta = T ?
- dado ≥ 4
- almeno 2 nati stesso giorno ?
- Tutte le molecole di $e^-$ ?

A evento $\quad A \subset \Omega$


risposta positiva se $\omega \in A$

OPERAZIONI SUGLI EVENTI :

$A^C = \Omega \setminus A$ (A complementare, non A, ..)

$A \cup B$ unione (A oppure B)

$A \cap B$ intersezione (A e B insieme)

con delle regole

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$


⋮

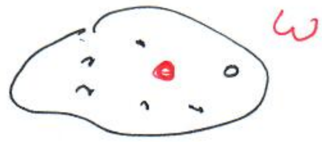
$A\cup$

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

⋮

CONFRONTA: significato logico vs. insiemistico

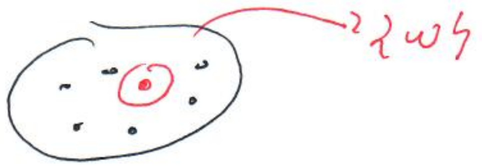
Evento elementare $\omega \in \Omega$ (PUNTO DI $\Omega$)




è anche
un evento (= sottoinsieme di $\Omega$)

IL SINGOLETTO

$\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ = classe collezione dei sottoinsiemi di $\Omega$




$A, B \subset \Omega$

DISGIUNTI (mutuamente esclusivi)

quando $A \cap B = \emptyset$


NON possono capitare insieme

$\mathcal{A}$ = ALGEBRA DEGLI EVENTI

= COLLEZIONE DI SOTTOINSIEMI DI $\Omega$
CHIUSA RISPETTO A $\cdot^c$, $\cup$, $\cap$

Normalmente $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ = TUTTI I SOTTOINSIEMI

ma ci conviene essere più liberi,
prendere cioè solo alcuni

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

## 3 PROBABILITÀ

$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \longmapsto [0,1]$$

T.C.

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0 \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

(scelta della scala)

!!! ADDITIVA !!! FONDAMENTALE!

A, B DISGIUNTI $(A \cap B = \emptyset)$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

→ Capire il motivo di questa richiesta

A VOLTE (IN PROBLEMI CON SIMMETRIA)

$\mathbb{P}$ PROB. UNIFORME

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

→ È UN CASO PARTICOLARE

<u>CONSEGUENZE</u>

- $$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

INFATTI

Allora $A \cup A^C = \Omega$

$A \cap A^C = \emptyset$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

• $A, B \in \mathcal{A}$ (non necess. disgiunti)


$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

infatti:

$$B' = B \setminus (A \cap B)$$

$$A \cup B = A \cup B' \quad e \quad A \cap B' = \emptyset$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cup B') = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B')$$

$$B' \cup (A \cap B) = B \quad e \quad (A \cap B) \cap B' = \emptyset$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B') + \mathbb{P}(A \cap B) \qquad \square$$

• $\mathbb{P}$ È MONOTONA

(RISPETTO ALL'INCLUSIONE DI INSIEMI)

$$\underbrace{A \subset B}_{\text{relazione tra insiemi}} \Rightarrow \mathbb{P}(A) \underbrace{\leq}_{\text{relazione tra numeri}} \mathbb{P}(B)$$

infatti


$$B = A \cup (B \setminus A) \qquad \text{(unione disgiunta)}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}(A)$$

# ⓪ COSTRUZIONE DI UN MODELLO PROB. 

$\Omega$ INSIEME FINITO (FACILE)

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ = TUTTI I SOTTOINSIEMI DI $\Omega$

ma $\mathbb{P}$ ?

se $|\Omega| = 10$ $\quad |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{10}$ ~~[illegible]~~ un un

$\mathbb{P} = ?$ $\quad 2^{10}$ PUNTI e un sacco di vincoli

→ BASTA CONOSCERE $\mathbb{P}$ SUI SINGOLETTI $\Delta$

MAGIA NOTAZIONALE

$A \subset \Omega$ UN EVENTO

PER additività

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

poiché

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

capire il senso

e $\mathbb{P}$ è additiva

$p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$ PROB. EVENTI ELEMENTARI

$p : \Omega \to [0,1]$ $\quad$ 10 numeri $\ll 2^{10}$ numeri

che vincoli ci sono su $p$ ?

(i) $p \geq 0$

(ii) $$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

TEO

⊗ $\mathbb{P}$ PROB su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ $\quad p(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\})$
SODDISFA (i) e (ii)

⊗ Viceversa:
Sia $p$ che t.c. soddisfa (i) e (ii)

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$ è una PROB. su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

dim: esercizio

Esercizio:

— o —

2 BIANCHE
3 NERE

ESTRAGGO DUE PALLINE
SENZA REINSERIMENTO

$\mathbb{P}(\text{II}^a \text{ ESTRATTA} = B) = \ ?$