Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 1

Esercizio 1. Si consideri l'operatore $-\frac{d^2}{dt^2}$ nell'intervallo $t \in [0,1]$. Trovare le condizioni al bordo per cui la sua funzione di Green è data da $C(s,t) = \min\{s,t\}$. Interpretare il risultato in termini della covarianza del moto Browniano.

Esercizio 2. Sia $C(\mathbb{R}_+)$ l'insieme delle funzioni continue sul semiasse reale. Trovare una metrica che induca la convergenza uniforme sui compatti: $x_n \to x$ sse per ogni compatto $K \subset\subset \mathbb{R}_+$ si ha che x_n converge a x uniformemente in K. Verificare che la σ algebra di Borel coincide con la σ algebra generata dai cilindri.

Esercizio 3. Esercizio 1.16 del libro di Liggett.

Esercizio 4. Esercizio 1.20 del libro di Liggett.

Esercizio 5. Esercizio 1.22 del libro di Liggett. (Il docente non sa risolverlo)

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 2

Esercizio 1. Esercizio 1.23 del libro di Liggett.

Esercizio 2. Per $n \in \mathbb{N}$, siano X_k, $k = 1, \cdots, 2^n$ variabili aleatorie gaussiane standard i.i.d. Per ogni $\alpha > 1/2$, dimostrare che con probabilità uno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \max_{1\le k\le 2^n} |X_k| = 0$$

Esercizio 3. Esercizio 1.25 del libro di Liggett. Nota. Nel punto (a) sostituire $\phi_{n,k}$ con $\psi_{n,k}$ ove $\psi_{n,k}$ è la funzione definita nell'esercizio 1.23 (ora la base è indicizzata con due indici e non uno). Nel punto (b) sostituire Esercizio 1.24 con l'esercizio precedente.

Esercizio 4. Dimostrare la completezza della base di Haar (come definita in Ex. 1.25 del libro di Liggett) in $L^2([0,1])$. In alternativa: chiedere tale dimostrazione ad un docente a scelta di un corso di analisi.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni reali con la topologia prodotto.

1) Costruire una metrica che induca la topologia dichiarata.

2) Verificare che se la successione di probabilità $\{P_n\}$ su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge sui cilindri allora è tight.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 3

Esercizio 1. Dimostrare che, con probabilità uno, il moto browniano ha variazione infinita in ogni intervallo.

Esercizio 2. Esercizio 1.29 del libro di Liggett.

Esercizio 3. Sia B il moto browniano. Utilizzando Corollario A.28 del libro di Liggett, dimostrare che, con probabilità uno,

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty$$

Esercizio 4. Esercizio 1.30 del libro di Liggett.

Esercizio 5. Esercizio 1.127 del libro di Liggett.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 4

Esercizio 1. Siano τ_1, τ_2 due tempi di arresto e $\mathcal{F}_{\tau_1}$, $\mathcal{F}_{\tau_2}$ le corrsipondenti filtrazioni arrestate. Dimostrare che se $\tau_1 \leq \tau_2$ allora $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Esercizio 2. Esercizio 1.53 del libro di Liggett.

Esercizio 3. Esercizio 1.82 del libro di Liggett.

Esercizio 4. Esercizio 1.83 del libro di Liggett.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 5

Esercizio 1. Sia B il moto browniano unidimensionale che parte da zero. Per $a, b > 0$, sia inoltre

$$\tau := \inf\{t > 0 \colon B_t \notin (-a, b)\}.$$

Dimostrare che la variabile aleatoria τ ha coda esponenziale, ovvero che esistono $c > 0$, $t_0 \geq 0$ per cui

$$\mathbb{P}(\tau > t) \leq \exp\{-ct\}, \qquad t \geq t_0.$$

Esercizio 2. Esercizio 1.85 del libro di Liggett.

Esercizio 3. Esercizio 1.110 del libro di Liggett.

Esercizio 4. Esercizio 1.112 del libro di Liggett.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 6

Esercizio 1. Esercizio 5.15 del libro di Liggett.

Esercizio 2. Sia B il moto browniano standard. Verificare che

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}\big[B_t^2 - t\big]$$

Esercizio 3. Esercizio 5.16 del libro di Liggett.

Esercizio 4. Sia B il moto browniano standard. Verificare che

$$\int_0^1 t\, dB_t = B_1 - \int_0^1 B_t\, dt$$

Esercizio 5. Sia B il moto browniano standard e M la martingala $M_t = B_t^2 - t$. Trovare la variazione quadratica di M.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 7

Esercizio 1. Esercizio 5.34 del libro di Liggett.

Esercizio 2. Esercizio 5.38 del libro di Liggett.

Esercizio 3. [1] Per $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia $\hat{f}$ la sua trasformata di Fourier,

$$\hat{f}(k) := \int dx\, e^{-ikx} f(x).$$

Per $s \geq 0$ sia H_s lo spazio di Sobolev di ordine s, definito – ad esempio – dalla norma (euclidea)

$$\|f\|_s^2 := \int dk\, (1+k^2)^s\, |\hat{f}(k)|^2$$

Sia inoltre H_{-s} il duale di H_s, che si può identificare con lo spazio delle distribuzioni ℓ tali che $\|\ell\|_{-s} < +\infty$, ove

$$\|\ell\|_{-s}^2 := \int dk\, (1+k^2)^{-s}\, |\hat{\ell}(k)|^2.$$

Nel seguito $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica la dualità tra H_s e H_{-s}.

Sia B il moto browniano standard e $T > 0$ fissato. Questo esercizio propone la realizzazione dell'integrale stocastico

$$I(f) = \int_0^T f(B_t) dB_t$$

simultaneamente per tutte le $f \in H_s$, ovvero come variabile aleatoria (definita con probabilità 1) a valori H_{-s}.

L'affermazione precisa è la seguente sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ la realizzazione canonica del moto browniano, i.e. $\Omega = C([0,T])$, $\mathbb{P}$ misura di Wiener. Se $s > 1/2$ allora esiste un'applicaziobe misurabile $\vartheta\colon \Omega \to H_{-s}$ tale che con probabilità uno $\langle \vartheta(B), f \rangle = I(f)$ per ogni $f \in H_s$ (c'è un insieme di probabilità uno che funziona per tutte le f).

1) Via qualche lemma di rappresentazione verificare che è sufficente dimostrare la seguente stima. Per $s > 1/2$ esiste una costante aleatoria $\mathcal{C}$ finita con probabilità uno tale che per ogni $f \in H_s$

$$|I(f)|^2 \leq \mathcal{C}\, \|f\|_s^2 \tag{1}$$

2) Scrivendo $f(B_t)$ in termini di $\hat{f}$, verificare che (si ricorda che se $f \in H_s$ con $s > 1/2$ allora f è continua)

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int dk\, \hat{f}(k)\, M_T^k, \qquad M_T^k = \int_0^T e^{ikB_t} dB_t$$

3) Verificare che (1) vale con (a meno di π)

$$\mathcal{C} = \int dk\, (1+k^2)^{-s} \big|M_T^k\big|^2$$

4) Calcolare $\mathbb{E}\,\mathcal{C}$ e concludere.

[1] Si veda Flandoli F., Gubinelli M., Giaquinta M., Tortorelli V.M.: *Stochastic currents.* Stochastic Process. Appl. **115**, 1583–1601, (2005), per i dettagli di questo esercizio.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 8

Esercizio 1. Si consideri l'equazione stocastica (in $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} dX_t^x = -\lambda X_t^x dt + dB_t \\ X_0^x = x \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$

1) Scrivere, via variazione delle costanti, una formula esplicita per la soluzione ed osservare che X è un processo gaussiano.

2) Calcolare media e covarianza di X.

3) Dimostrare che $(X_t^x)_{t\geq 0} \overset{\text{Legge}}{=} \Big(e^{-\lambda t}[x + B_{S(t)}]\Big)_{t\geq 0}$ ove B è un moto browniano e $S\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funzione strettamente crescente (da trovare).

4) Trovare la densità di probabilità $q_t(x, \cdot)$ tale che

$$\mathbb{P}(X_t^x \in B) = \int_B dy\, q_t(x, y)$$

per ogni $t > 0$ ed ogni Boreliano $B \subset \mathbb{R}$.

5) Nel caso $\lambda > 0$ trovare $\lim_{t\to\infty} \text{Legge}(X_t^x)$.

Esercizio 2. [Il ponte browniano] Per $t \in [0, 1)$, si consideri l'equazione stocastica (in $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} dX_t = -\frac{X_t}{1-t} dt + dB_t \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

1) Scrivere, via variazione delle costanti, una formula esplicita per la soluzione ed osservare che X è un processo gaussiano.

2) Calcolare media e covarianza di X_t, $t \in [0, 1)$.

3) Dimostrare che $\lim_{t\uparrow 1} X_t = 0$ (in probabilità).

Sia ora Sia B il moto browniano in $\mathbb{R}$.

4) Per $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$ calcolare

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{P}\Big(B_{t_1} \in dx_1, \cdots, B_{t_n} \in dx_n \Big| |B_1| \leq \epsilon\Big)$$

e confrontare con le distribuzioni finito dimensionali del processo X.

5) Dimostrare che $(X_t)_{t\in[0,1]} \overset{\text{Legge}}{=} (B_t - tB_1)_{t\in[0,1]}$.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 10

Esercizio 1. Sia X un processo di Feller con semigruppo P_t e generatore L. Sia inoltre M_t^f, $t \geq 0$ la martigala di Dynkin

$$M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t ds\, Lf(X_s)$$

Rispondere alle seguenti domande senza preoccuparsi di domini (!?)

1) Verificare che

$$\Gamma(f,g) := \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big[P_t(fg) - P_t f\, P_t g\big]\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\big[L(fg) - fLg - gLf\big]$$

2) Verificare che

$$d\langle M^f, M^g\rangle_t = 2\,\Gamma(f,g)(X_t)\,dt$$

Nel senso che $M_t^f M_t^g - \langle M^f, M^g\rangle_t$ è una martingala.

3) Nel caso di un processo di diffusione, i.e. soluzione di un equazione stocastica, confrontare con quanto ottenuto dalla formula di Ito.

Esercizio 2. Ex. 3.5 libro di Liggett

Esercizio 3. Ex. 3.18 libro di Liggett

Esercizio 4. Ex. 3.20 libro di Liggett

Esercizio 5. Esempio 3.54 libro di Liggett

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2019-20
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 11

Esercizio 1. Sia L il generatore di un processo di Feller. Ricordando che $\Gamma(f,g) := \frac{1}{2}\big[L(fg) - fLg - gLf\big]$ sia

$$\Gamma_2(f,g) := \frac{1}{2}\big[L\Gamma(f,g) - \Gamma(Lf,g) - \Gamma(g,Lf)\big].$$

Calcolare Γ_2 quando $Lf = \Delta f - \nabla V \cdot \nabla f$.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione stocastica unidimensionale

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t.$$

Sia m la funzione definita da

$$m(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)} \exp\Big\{2\int_0^x dy \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}\Big\}.$$

Verificare che sotto opportune condizioni (da capire) la misura $m(x)dx$ è invariante per X_t.

Esercizio 3. Sia X_t il moto browniano bidimensionale e D la corona circolare tra le due circonferenze $\gamma := \{|x| = r\}$ e $\Gamma := \{|x| = R\}$, con $r < R$, e τ il tempo di prima uscita da D. Verificare che

$$\mathbb{P}_x(X_\tau \in \gamma) = \frac{\log R - \log|x|}{\log R - \log r}$$

Mediante passaggio al limite per $R \to \infty$ trovare la probabilità di colpire γ. Mediante passaggio al limite per $r \to 0$ trovare la probabilità di colpire $\{0\}$.

Esercizio 4. Sia X_t il moto browniano bidimensionale.

1) Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ si ha $\mathbb{P}_x(\exists t\colon X_t \in A) = 1$

2) Dimostrare che se $x \neq y$ allora $\mathbb{P}_x(\exists t\colon X_t = y) = 0$

Suggerimento. Utilizzare l'esercizio precedente.

Esercizio 5. Calcolare le stesse probabilità dell'esercizio 1 per il moto browniano tridimensionale.

Esercizio 6. Calcolare il valore di attesa del tempo di uscita del moto browniano bidimensionale dall'angolo $\{(x_1,x_2) : |x_2| \le x_1 \tan(\alpha/2)\}$.