FISICA MATEMATICA

Prova di valutazione del 15/11/2016

Cognome, nome, matricola ....

Svolgere tre esercizi tra i quattro proposti.

Esercizio 1. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$(i) \begin{cases} \partial_t u(z,t) + (2z-3)\partial_z u(z,t) = -z^2 \\ u(z,0) = \sin^2 z \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} \partial_t u(x,v,t) - v\partial_x u(x,v,t) + (2v-3)\partial_v u(x,v,t) = 0 \\ u(x,v,0) = x \end{cases}$$

(i) $u(z,t) = u_0(\varphi^{-t}(z)) + \int_0^t ds \, -(\varphi^{s-t}_{(z)})^2$, dove φ^t e' il flusso associato all'EDO

$$\begin{cases} \dot z = 2z-3 \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

soluzione: $z(t) = (z_0 - \frac{3}{2})e^{2t} + \frac{3}{2} \Rightarrow \varphi^t_{(z)} = (z - \frac{3}{2})e^{2t} + \frac{3}{2}$;

$$u(z,t) = \sin^2(\varphi^{-t}_{(z)}) - \int_0^t ds \, (\varphi^{-s}_{(z)})^2$$

$$= \sin^2\left[\tfrac{1}{2}\left(3 + (2z-3)e^{-2t}\right)\right] - \int_0^t ds \left\{ (z - \tfrac{3}{2})^2 e^{-4s} + \tfrac{9}{4} + 3(z - \tfrac{3}{2})^2 e^{-2s} \right\};$$

svolgendo l'integrale otteniamo

$$u(z,t) = \sin^2\left[\tfrac{1}{2}\left(3 + (2z-3)e^{-2t}\right)\right] - \tfrac{1}{16}(2z-3)^2(1-e^{-4t}) - \tfrac{9}{4}t - \tfrac{3}{4}(2z-3)(1-e^{-2t})$$

(ii) $u(x,v,t) = \varphi_1^{-t}(x,v)$, dove φ^t e' il flusso (bidimensionale) associato all'EDO

$$\begin{cases} \dot x = v \\ \dot v = (2v-3) \\ x(0) = x_0; \ v(0) = v_0; \end{cases}$$

soluzione: $v(t) = (v_0 - \frac{3}{2})e^{2t} + v_0$

$$x(t) = x_0 - \int_0^t ds \, v(s) = x_0 - \tfrac{1}{4}(2v_0 - 3)(1 - e^{2t}) - \tfrac{3}{2}t$$

$$\Rightarrow \varphi^t_{(x,v)} = \begin{pmatrix} \varphi_1^t(x,v) \\ \varphi_2^t(x,v) \end{pmatrix} \text{ con } \begin{array}{l} \varphi_1^t(x,v) = x - \frac{1}{4}(2v-3)(1-e^{2t}) - \frac{3}{2}t \\ \varphi_2^t(x,v) = (v - \frac{3}{2})e^{2t} + \frac{3}{2} \end{array}$$

$$u(x,v,t) = x - \tfrac{1}{4}(2v-3)(1-e^{-2t}) + \tfrac{3}{2}t$$

Esercizio 2. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x[(1-x)u(x,t)] = 0 \\ u(x,0) = (1-x^2)\sin^2 x \end{cases}$$

(i) determinare la soluzione del problema.
(ii)Sia $A_t = \{x : u(x,t) > 0\}$; determinare $|A_t|$.

(i) $u(x,t) = u_0(\varphi^{-t}(x))\, e^{-\int_0^t ds\, \operatorname{div} F(\varphi^{s-t}(x))}$

dove $F(x) = 1-x$, da cui $\operatorname{div} F(x) = F'(x) = -1$

e φ^t è il flusso associato all'EDO $\begin{cases} \dot{x} = (1-x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$, ovvero $\varphi^t(x) = (x-1)e^{-t} + 1$

$$\cdot\ u(x,t) = \left[1 - ((x-1)e^t + 1)^2\right] e^t \sin^2(1 + (x-1)e^t)$$
$$= -\left[2(x-1)e^{2t} + (x-1)^2 e^{3t}\right] \sin^2(1 + (x-1)e^t)$$

(ii) $A_t = \{x : u(x,t) > 0\} = \{x : u_0(\varphi^{-t}(x)) > 0\} = \{\varphi^t(y) : u_0(y) > 0\}$

$u_0(y) = (1-y^2)\sin^2 y \qquad u_0(y) > 0$ per $y \in (-1,1),\ y \neq 0$

$\Rightarrow A_t = \{\varphi^t(y),\ y \in (-1,0) \cup (0,1)\} = \{x \in (-2e^{-t}+1, -e^{-t}+1) \cup (-e^{-t}+1, 1)\}$

$\cdot\ |A_t| = 2e^{-t} = |A_0|\, e^{-t}$

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo con condizione al bordo omogenee

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \quad (x,t) \in (0,\pi)\times\mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = \sin(3x), \quad \partial_t u(x,0) = h(x) \ \text{ in } [0,\pi], \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

(i) determinare la soluzione per $h(x) = 2\sin(x)\cos(3x)$
(ii) calcolare la soluzione in $x = \pi/2$, $t = \frac{3}{2}\pi$ per $h(x) = x^2 - \pi x$.

(i) $g(x) := u(x,0) = \sin(3x)$; $g(0) = g(\pi) = 0$; $g''(0) = g''(\pi) = 0$,

• Chiamo $\tilde{g}(x)$ la funz. che ottengo estendendo g per disparità in $[-\pi,\pi]$ e poi per periodicità su tutto $\mathbb{R}$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{in } [0,\pi] \\ -g(-x) & \text{in } [-\pi,0] \\ \tilde{g}(x+2k\pi) & \forall x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \tilde{g}(x) = \sin(3x)$$

• $h(x) = \partial_t u(x,0) = 2\sin x\cos(3x)$; $h(0) = h(\pi) = 0$;
• chiamo $\tilde{h}(x)$ la funz. che ottengo estendendo h per disparità in $[-\pi,\pi]$ e poi per periodicità su tutto $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \tilde{h}(x) = 2\sin x\cos 3x$$

• soluzione

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{\sin[3(x-t)] + \sin[3(x+t)]\right\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} dy\, 2\sin y\cos 3y$$

$$= \sin(3x)\cos(3t) + \frac{1}{4}\sin(4t)\sin(4t) - \frac{1}{2}\sin(2x)\sin(2t)$$

(u è una combinazione lineare di onde armoniche stazionarie)

(ii) $\tilde{g}(x) = \sin(3x)$,

$h(x) = x^2 - \pi x$, $h(0) = h(\pi) = 0$, $\tilde{h}(x) = \begin{cases} x^2 - \pi x & \text{in } [0,\pi] \\ -(x^2+\pi x) & \text{in } [-\pi,0] \\ \tilde{h}(x+2k\pi) & \forall x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

• per $x = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow x+t = 2\pi$, $x-t = -\pi$

$$\Rightarrow u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) = \underbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)}_{=0} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{2\pi} dy\, \tilde{h}(y) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dy\, \tilde{h}(y) + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} dy\, \tilde{h}(y);$$

il primo integrale è zero perché $\tilde{h}$ è dispari; per calcolare il 2° integrale usiamo la periodicità di $\tilde{h}$

$$\int_{\pi}^{2\pi} dy\, \tilde{h}(y) = \int_{\pi}^{2\pi} dy\, \tilde{h}(y-2\pi) = \int_{-\pi}^{0} dy\, \tilde{h}(y)$$

$$= \int_{-\pi}^{0} dy\, -(y^2+\pi y) = -\left(\frac{y^3}{3} + \frac{\pi}{2}y^2\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = -\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{2} = \frac{\pi^3}{6}$$

$$\Rightarrow u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) = \frac{\pi^3}{12}$$

Esercizio 4. Si consideri una catena di N oscillatori armonici con moto trasversale.
(i) Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange per $N = 4$.
(ii) Scrivere il funzionale energia. E' un integrale primo del moto?
(iv) Scrivere il funzionale impulso. E' un integrale primo del moto?
(v)Determinare la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange per $N = 2$.

(i) $y := (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$; $\dot{y} \in \mathbb{R}^4$

$$\cdot\ \mathcal{L}(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{4} \dot{y}_i^2 - \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{3} (y_{i+1} - y_i)^2$$

· EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, 4 \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{aligned} m\ddot{y}_1 &= k(y_2 - y_1) \\ m\ddot{y}_i &= k(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \quad i = 2, 3 \\ m\ddot{y}_4 &= k(y_3 - y_4) \end{aligned}$$

(ii) $$H = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{4} \dot{y}_i^2 + \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{3} (y_{i+1} - y_i)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H &= m \sum_{i=1}^{4} \dot{y}_i \ddot{y}_i + k \sum_{i=1}^{3} (y_{i+1} - y_i)(\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_i) = m \sum_{i=1}^{4} \dot{y}_i \ddot{y}_i + k \sum_{i=2}^{4} (y_i - y_{i-1})\dot{y}_i - k \sum_{i=1}^{3} (y_{i+1} - y_i)\dot{y}_i \\ &= m \sum_{i=1}^{4} \dot{y}_i \ddot{y}_i + - \dot{y}_4 (y_3 - y_4) - k \sum_{i=2,3} (y_{i-1} + y_{i+1} - 2y_i)\dot{y}_i - k(y_2 - y_1)\dot{y}_1 \\ &= \dot{y}_1 \{ m\ddot{y}_1 - k(y_2 - y_1) \} + \sum_{i=2,3} \dot{y}_i \{ m\ddot{y}_i - k(y_{i+1} - 2y_i + 2y_{i-1}) \} + \dot{y}_4 \{ m\ddot{y}_4 - k(y_3 - y_4) \} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ H è un integrale primo del moto.

(iii) $$P = m \sum_{i=1}^{4} \dot{y}_i \ ; \quad \frac{d}{dt} P = m \sum_{i=1}^{4} \ddot{y}_i = k(y_2 - y_1) + k[(y_3 - y_2) + (y_1 - y_2)] + k[(y_4 - y_3) + (y_2 - y_3)] + k(y_3 - y_4) = 0$$

$\Rightarrow$ P è un integrale primo del moto

(iv) $N = 2$ $$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = k(y_2 - y_1) \\ m\ddot{y}_2 = k(y_1 - y_2) \\ y(0) = \bar{y}, \quad \dot{y}(0) = v \end{cases}$$

definiamo $z \in \mathbb{R}^2$, il vettore di componenti
$z_1 = (y_1 + y_2)$
$z_2 = (y_1 - y_2)$, ovvero $z = Ay$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

z risolve l'EDO $$\begin{cases} m\ddot{z}_1 = 0 \\ m\ddot{z}_2 = -2kz_2 \end{cases}$$ con condiz. iniziali $$\begin{cases} z(0) = A\bar{y} \\ \dot{z}(0) = Av \end{cases}$$

· soluz. $$\begin{cases} z_1(t) = (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) + (v_1 + v_2)t \\ z_2(t) = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)\cos(\omega_k t) + \frac{(v_1 - v_2)}{\omega_k} \operatorname{sen}(\omega_k t) \end{cases}$$ dove $\omega_k = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

$$\Rightarrow y_1(t) = \frac{1}{2}(z_1(t) + z_2(t)) = \frac{1}{2}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)t + \frac{1}{2}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)\cos(\omega_k t) + \frac{1}{2\omega_k}(v_1 - v_2)\operatorname{sen}(\omega_k t)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}(z_1(t) - z_2(t)) = \frac{1}{2}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)t - \frac{1}{2}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)\cos(\omega_k t) - \frac{1}{2\omega_k}(v_1 - v_2)\operatorname{sen}(\omega_k t)$$