CORSO DI LAUREA in Fisica, aa 2014/15 (canale Pm-Z)

Equazioni lineari del II ordine a coefficienti costanti: sintesi di quanto presentato con ricchezza di esempi nelle Dispense. Il §2 riguarda il caso non-omogeneo che sulle dispense è trattato solo nel caso periodico.

$$y'' + 2by' + cy = f(t)$$

---

1. Caso omogeneo: $f(x) \equiv 0$

$$y'' + 2by' + cy = 0 \;\; (t \in \mathbb{R}), \quad b, c \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Linearità: Date y_1 e y_2 soluzioni di (1), *ogni combinazione lineare di* y_1 *e* y_2 *è soluzione di* (1) (verificarlo).

(b) Dati iniziali: Le "condizioni di partenza" o di *Cauchy* per equazioni del secondo ordine sono due:

$$y(t_0) = y_0\,, \qquad y'(t_0) = y_1 \qquad \textit{(Condizioni di Cauchy).} \tag{2}$$

Si dimostra che, imponendo tali condizioni si determina una soluzione ed essa è unica. Per meglio comprendere, consideriamo il caso in cui $y(t)$ rappresenti la posizione di un corpo su una retta orientata. Allora $y'(t)$ e $y''(t)$ ne rappresentano rispettivamente la velocità e l'accelerazione. L'equazione (1) indica la legge che lega l'accelerazione con la velocità e la posizione. Allora assegnate le condizioni (2), quindi la posizione e la velocità del corpo ad un certo istante t_0, l'accelerazione viene determinata dalla legge (1) e quindi dal punto di visto fisico, ci aspettiamo che effettivamente il moto del corpo sia univocamente determinato, risultato che si puó dimostrare rigorosamente.

(c) Insieme delle soluzioni: Dai precedenti punti (a) e (b) segue che l'insieme delle soluzioni di (1) è uno spazio vettoriale di dimensione 2. Quindi, date due soluzioni linearmente indipendenti $y_1(t)$ e $y_2(t)$, esse costituiscono una base per l'insieme delle soluzioni. Allora l'insieme di tutte le soluzioni, che è detto **integrale generale**, è dato da

$$w(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)\,, (t \in \mathbb{R}), \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R} \qquad \textit{(integrale generale).}$$

(d) Determinazione di due soluzioni linearmente indipendenti: Poichè nel caso lineare del primo ordine a coefficienti costanti omogeneo $y' + ay = 0$ le soluzioni sono della forma $y(t) = y_0 e^{-at}$ per ogni $y_0 \in I\!R$, vediamo se anche in questo caso esistono soluzioni di questo tipo. Se $y(t) = e^{\lambda t}$, si ha $y'(t) = \lambda\, e^{\lambda t}$ e $y''(t) = \lambda^2\, e^{\lambda t}$.

Sostituendo nell'equazione (1) si ottiene la condizione

$$y'' + 2by' + cy = \lambda^2\, e^{\lambda t} + 2b\lambda\, e^{\lambda t} + c\, e^{\lambda t} = e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 2b\lambda + c\right) = 0 \quad (t \in I\!R).$$

Quindi

$$y(t) = e^{\lambda t} \text{ è soluzione} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda \text{ risolve l'equazione:}$$

$$\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \qquad \textit{(equazione caratteristica)}$$

Caso I. $b^2 > c$. Il polinomio caratteristico ha due radici reali

$$\lambda_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}, \qquad \lambda_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}.$$

Otteniamo le soluzioni $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ che risultano linearmente indipendenti (*facoltativo*: verificarlo). Allora si ottiene

$$w(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,, (t \in I\!R), \quad c_1,\, c_2 \in I\!R \qquad \textit{(integrale generale).}$$

Caso II. $b^2 = c$. Il polinomio caratteristico ha un'unica soluzione $\lambda = -b$, che determina la soluzione $y_1(t) = e^{-bt}$. Una seconda soluzione, linearmente indipendente da y_1 è $y_2(t) = te^{-bt}$ (verificarlo [1]) Allora si ottiene

$$w(t) = c_1 e^{-bt} + c_2 te^{-bt} = (c_1 + c_2 t)e^{-bt}\,, (t \in I\!R), \quad c_1,\, c_2 \in I\!R \qquad \textit{(integrale generale).}$$

Caso III. $b^2 < c$. Se $b^2 < c$, il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 2b\lambda + c$ ha due radici complesse coniugate $\lambda = -b \pm i\nu$ dove $\nu = \sqrt{c - b^2} > 0$. In questo caso si può verificare che una coppia di soluzioni linearmente indipendenti è data da $y_1(t) = e^{-bt}\cos(\nu t)$ e $y_2(t) = e^{-bt}\sin(\nu t)$ (tali soluzioni possono essere ottenute attraverso l'esponenziale complesso, come riportato nelle Dispense, parte IV, Cap. 2, §2). Allora

$$w(t) = c_1 e^{-bt}\cos(\nu t) + c_2 e^{-bt}\sin(\nu t)\,, (t \in I\!R), \quad c_1,\, c_2 \in I\!R \qquad \textit{(integrale generale).}$$

[1] Per determinarla si puó utilizzare il metodo di variazione delle costanti, considerando una funzione della forma $u(t) = c(t)e^{-bt}$. Risulta $u'(t) = c'(t)e^{-bt} - bu(t)$, $u''(t) = c''(t)e^{-bt} - 2bc'(t)e^{-bt} + b^2 u(t)$. Allora affinchè $u(t)$ sia soluzione deve aversi (ricordando che $c = b^2$):

$$u'' + 2bu' + b^2 u = c''(t)e^{-bt} - 2bc'(t)e^{-bt} + b^2 u(t) + 2bc'(t)e^{-bt} - 2b^2 u(t) + b^2 u(t) = c''(t)e^{-bt} = 0\,.$$

L'equazione è quindi verificata se e solo se $c''(t) = 0$, quindi $c'(t) = c_2$ da cui $c(t) = c_2 t + c_1$. Abbiamo cosí ottenuto l'integrale generale.

2. Caso non omogeneo

$$y'' + 2by' + cy = f(t) \ \ (t \in I\!R), \quad b, c \in I\!R, \ f \text{ continua in } I\!R. \tag{3}$$

Si verifichi che, se $\bar{y}_1(t)$ e $\bar{y}_2(t)$ sono due soluzioni di (3), la funzione $w(t) = \bar{y}_1(t) - \bar{y}_2(t)$ è soluzione del problema omogeneo associato (1). Allora

La soluzione o integrale generale dell'equazione non omogenea (2) è

$$y(t) = w(t) + \bar{y}(t) \qquad \text{dove} \quad \begin{cases} w(t) & \text{integrale generale di (1)} \\ \bar{y}(t) & \text{soluzione particolare di (3).} \end{cases}$$

Esempio 1: L'equazione

$$y'' + y' - 6y = -12t\,, \tag{4}$$

ha una soluzione $\bar{y}(t) = 2t + \frac{1}{3}$ (verificarlo). Poichè il polinomio caratteristico del problema omogeneo associato $y'' + y' - 6y = 0$ è $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, si ottiene $\lambda_- = -3$, $\lambda_+ = 2$ e quindi l'integrale generale del problema omogeneo associato è $w(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ $(c_1,\, c_2 \in I\!R)$. Allora l'integrale generale del problema non omogeneo (4) è

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + 2t + \frac{1}{3}\,,\ (c_1,\, c_2 \in I\!R)\,.$$

Esempio 2: L'equazione

$$y'' + y' - 6y = 24e^{-4t}\,, \tag{5}$$

ha una soluzione $\bar{y}(t) = 4e^{-4t}$ (verificarlo). Poichè il problema omogeneo associato è lo stesso dell'esercizio precedente, l'integrale generale del problema non omogeneo (5) è

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + 4e^{-4t}\ (c_1,\, c_2 \in I\!R)\,.$$

Principio di sovrapposizione.
Se
y_1 è soluzione di $y'' + 2by' + cy = f_1(t)$,
y_2 è soluzione di di $y'' + 2by' + cy = f_2(t)$,
allora
$y(t) := y_1(t) + y_2(t)$ è soluzione di $y'' + 2by' + cy = f_1(t) + f_2(t)$.

Esempio 3: Dai precedenti Esempi 1 e 2 segue che l'equazione

$$y'' + y' - 6y = -12t + 24e^{-4t}\,, \tag{6}$$

ha il seguente integrale generale

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + 2t + \frac{1}{3} + 4e^{-4t}\ (c_1,\, c_2 \in I\!R)\,.$$

RICERCA DI SOLUZIONE PARTICOLARE $\bar{y}(t)$ PER $f(t)$ PARTICOLARE:

Polinomi di grado n: $f(t) = p_n(t) \quad \Rightarrow \quad \bar{y}(t) = q_n(t)$ (polinomio di grado n) cioè cerco come soluzione un polinomio dello stesso grado di f, $q_n(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$, ne calcolo le derivate e le sostituisco nell'equazione cercando poi per quali coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ l'equazione è soddisfatta. Infatti la derivata di un polinomio è un polinomio di grado inferiore a quello del polinomio di partenza, quindi se $c \neq 0$ determiniamo una soluzione. Altrimenti:

ATTENZIONE: se le costanti, quindi i polinomi di grado zero, fossero soluzioni dell'equazione omogenea associata (questo succede se $c = 0$, e quindi $\lambda = 0$ è soluzione del polinomio caratteristico), dobbiamo prendere $\bar{y}(t) = tq_n(t)$. Se i polinomi di primo grado fossero soluzioni (questo succede se $b = c = 0$, e quindi se $\lambda = 0$ è soluzione doppia del polinomio caratteristico) dobbiamo prendere $\bar{y}(t) = t^2 q_n(t)$. Si tratta di un caso di "Risonanza" (vedere anche il paragrafo successivo su tale argomento).

Esempio 4: Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + y = 3t^2. \tag{7}$$

Equazione caratteristica: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1$ (radici reali e coincidenti). L'integrale generale è dato da $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \bar{y}(t)$, dove $\bar{y}(t)$ deve essere un opportuno polinomio di grado 2, essendo di grado 2 il termine noto $3t^2$ (non siamo in un caso di risonanza perchè l'equazione omogenea non ha nessun polinomio come soluzione. Infatti sono $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$).

$\bar{y}(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{y}'(t) = \beta + 2\gamma t \quad \Rightarrow \quad \bar{y}''(t) = 2\gamma,$

allora, sostituendo nell'equazione (7), si ha che

$\bar{y}(t)$ è soluzione $\quad \Leftrightarrow \quad$ (per ogni $t \in R$)

$f(t) = 3t^2 = \bar{y}'' - 2\bar{y}' + \bar{y} = 2\gamma - 2(\beta + 2\gamma t) + \alpha + \beta t + \gamma t^2 = 2\gamma - 2\beta + \alpha + (-4\gamma + \beta)t + \gamma t^2.$

Poichè due polinomi sono identicamente uguali se e solo se hanno uguali i coefficienti dei termini dello stesso grado, otteniamo

$$\begin{cases} 2\gamma - 2\beta + \alpha = 0 \\ -4\gamma + \beta = 0 \\ \gamma = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\gamma + 2\beta = -6 + 24 = 18 \\ \beta = 4\gamma = 12 \\ \gamma = 3\,. \end{cases}$$

Allora la soluzione particolare trovata è $\quad \bar{y}(t) = 18 + 12t + 3t^2.$

Esponenziali: $f(t) = k\mathrm{e}^{\gamma t} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}(t) = \alpha \mathrm{e}^{\gamma t}$
cioè cerco come soluzione lo stesso esponenziale moltiplicato per una costante, ne calcolo le derivate e le sostituisco nell'equazione cercando poi per quale costante α l'equazione è soddisfatta.

ATTENZIONE: se $\bar{y}(t) = \alpha \mathrm{e}^{\gamma t}$ fosse soluzione dell'equazione omogenea associata (come già visto, questo succede se γ è soluzione del polinomio caratteristico), siamo in un caso di "Risonanza": vedere il paragrafo successivo su tale argomento.

Esempio 5: Determinare l'integrale generale dell'equazione $y'' - 2y' + y = 5e^{-t}$.
L'equazione omogenea è la stessa dell'esempio precedente, quindi l'integrale generale è dato da $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \bar{y}(t)$, dove $\bar{y}(t) = \alpha e^{-t}$ per un opportuno valore di α che dobbiamo determinare (non siamo in un caso di risonanza perchè $\lambda = -1$ non è soluzione del polinomio caratteristico).

$\bar{y}(t) = \alpha e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}'(t) = -\alpha e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}''(t) = \alpha e^{-t}$,

allora $\bar{y}(t)$ è soluzione $\quad \Leftrightarrow \quad$ (per ogni $t \in R$)

$f(t) = 5e^{-t} = \bar{y}'' - 2\bar{y}' + \bar{y} = \alpha e^{-t} - 2(-\alpha e^{-t}) + \alpha e^{-t} = 4\alpha e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad 5 = 4\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{5}{4}$.

Allora la soluzione particolare trovata è $\bar{y}(t) = \frac{5}{4} e^{-t}$.

Funzioni trigonometriche:

$$f(t) = k e^{\gamma t} \sin(\omega t) \text{ o } f(t) = k e^{\gamma t} \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \bar{y}(t) = \alpha e^{\gamma t} \sin(\omega t) + \beta e^{\gamma t} \cos(\omega t),$$

cioè ottengo come soluzione il prodotto dell'esponenziale per una combinazione lineare di seni e coseni (con lo stesso argomento), anche se in $f(t)$ compare solo una funzione seno o solo un coseno. Per determinare piú rapidamente tale soluzione particolare è conveniente lavorare con esponenziali complessi, come sulle Dispense, parte IV, Cap. 2, §3: **Forzanti periodiche**, dove è trattato il caso $\gamma = 0$. Si cerca quindi una soluzione della forma
$z(t) = \sigma e^{(\gamma + i\omega)t}$, $\sigma \in \mathbb{C}$,
per l'equazione
$z'' + 2bz' + cz = k e^{(\gamma + i\omega)t}$.
Essendo un'uguaglianza tra numeri complessi equivalente all'uguaglianza tra le parti reali (che indicheremo con $Re(\ldots)$) e i coefficienti dell'immaginario (che indicheremo con $Im(\ldots)$), la linearità dell'equazione ci permette di dire che la soluzione cercata sará $\bar{y}(t) = Re(z(t))$ se $f(t) = k e^{\gamma t} \cos(\omega t) = Re(k e^{(\gamma + i\omega)t})$,
$\bar{y}(t) = Im(z(t))$ se $f(t) = k e^{\gamma t} \sin(\omega t) = Im(k e^{(\gamma + i\omega)t})$.

ATTENZIONE: se $\bar{y}(t) = \alpha k e^{\gamma t} \sin(\omega t) + \beta e^{\gamma t} \cos(\omega t)$ fosse soluzione dell'equazione omogenea associata (questo succede se $\gamma \pm i\omega$ sono soluzioni del polinomio caratteristico), siamo in un caso di "Risonanza": vedere il paragrafo successivo su tale argomento.

Esempio 6: Determinare l'integrale generale dell'equazione $y'' - 2y' + y = e^{3t} \sin(2t)$.

L'equazione omogenea è la stessa degli esempi precedenti. Per trovare una soluzione particolare lavoro con la funzione complessa

$z(t) = \sigma e^{(3+2i)t}$, $\sigma \in \mathbb{C}$

(non siamo in un caso di risonanza perchè $\lambda = 3 \pm 2i$ non è soluzione del polinomio caratteristico). Allora

$z'(t) = (3+2i)z(t) \quad \Rightarrow \quad z''(t) = (3+2i)^2 z(t) = (5+12i)z(t)$

allora $z(t)$ è soluzione sse (per ogni $t \in R$)

$e^{(3+2i)t} = z'' - 2z' + z = z(t)[5 - 6 + 1 + i(12-4)] = \sigma e^{(3+2i)t} 8i.$

Poichè il primo membro deve essere uguale all'ultimo otteniamo

$1 = 8\sigma i$, quindi $\sigma = \frac{1}{8i} = -\frac{i}{8}$.

Infine, essendo in questo caso $f(t) = e^{3t}\sin(2t) = Im(e^{(3+2i)t})$, la soluzione particolare trovata è la parte immaginaria di $z(t)$, quindi

$\bar{y}(t) = Im(z(t)) = -Im(\frac{i}{8}e^{(3+2i)t}) = -Im(\frac{i}{8}e^{3t}(cos(2t) + i\sin(2t)) = -\frac{1}{8}e^{3t}\cos(2t).$

Prodotti di funzioni dei casi precedenti: Se

$$\begin{array}{lll} f_1(t) & \rightarrow \text{ha soluzioni del tipo} & \rightarrow \quad \bar{y}_1(t) \\ f_2(t) & \rightarrow \text{ha soluzioni del tipo} & \rightarrow \quad \bar{y}_2(t) \\ & \qquad\qquad \text{allora} & \\ f(t) = f_1(t)f_2(t) & \rightarrow \text{ha soluzioni del tipo} & \rightarrow \quad \bar{y}(t) = \bar{y}_1(t)\bar{y}_2(t) \end{array}$$

cioè si deve cercare una soluzione prodotto del **tipo** di soluzioni suggerite per $f_1(t)$ e $f_2(t)$ (dove compaiono prodotti di coefficienti incogniti li sostituisco con un unico coefficiente incognito). Del tipo di soluzione ottenuta calcolo le derivate e le sostituisco nell'equazione cercando poi per quali coefficienti l'equazione è soddisfatta.

ATTENZIONE: questo **non significa** che il prodotto della soluzione corrispondente all'equazione con $f(t) = f_1(t)$ e di quella corrispondente all'equazione con $f(t) = f_2(t)$ è soluzione dell'equazione con $f(t) = f_1(t)f_2(t)$. Questa affermazione è falsa, stiamo solo indicando il tipo di soluzioni da cercare.

Esempio 7: Se $f(t) = 2te^{3t}$, cerco una soluzione della forma $\bar{y}(t) = (at+b)e^{3t}$. La stessa regola vale per il prodotto di tre funzioni del tipo qui analizzato, *ad esempio* se $f(t) = 2te^{3t}\cos(5t)$, cerco nei complessi una soluzione della forma $z(t) = (\sigma t + \eta)e^{(3+5i)t}$, σ, $\eta \in \mathbb{C}$. Allora avró una soluzione della forma $\bar{y}(t) = Re(z(t))$.

* Risonanza

Se come $\bar{y}(t)$ trovo una soluzione dell'equazione (1) (anche solo per certi valori delle costanti), la funzione $t\bar{y}(t)$ (con le costanti incognite presenti in $\bar{y}(t)$) permette di trovare una soluzione dell'equazione (2), o, qualora anche questa fosse soluzione di (1), $t^2\bar{y}(t)$ è soluzione di (2) per una scelta opportuna delle costanti che compaiono in $\bar{y}(t)$.

Esempio 8: Se ho l'equazione $y'' + y = 4\cos t$, la soluzione della forma $\bar{y}(t) = a\sin t + b\cos t$ è soluzione dell'equazione omogenea, quindi non può dare una soluzione particolare della non omogenea ($4\cos t = Re(4e^{it})$ e $\pm i$ è soluzione del polinomio caratteristico). Cerco allora una soluzione complessa della forma $z(t) = \sigma t e^{it}$ e, avendola trovata, ho la soluzione particolare $\bar{y}(t) = Re(z(t))$. Si veda l'Esempio 10.

Esempio 9: Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 5y' + 6y = 6t^2\,, \qquad (t \in I\!R)\,. \tag{8}$$

Risoluzione:

a) *(trovo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata)* l'equazione caratteristica associata al problema omogeneo è:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = -3\,,\ \lambda_2 = -2\,.$$

Allora l'integrale generale del problema omogeneo è dato da

$$w(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t}\,, \quad t \in I\!R\,.$$

b) *(trovo un integrale particolare dell'equazione)* in questo caso $f(t) = 6t^2$ quindi devo cercare come soluzione un polinomio di grado 2 e quindi del tipo $q(t) = at^2 + bt + c$. Si ha $q'(t) = 2at + b$ e $q''(t) = 2a$, quindi $q(t)$ è una soluzione particolare se verifica (per ogni $t \in I\!R$)

$$q'' + 5q' + 6q = 6t^2 \Leftrightarrow 2a + 5(2at + b) + 6(at^2 + bt + c) = 6t^2 \Leftrightarrow$$
$$6at^2 + (10a + 6b)t + 2a + 5b + 6c = 6t^2\,.$$

Poichè due polinomi sono identicamente uguali se e solo se hanno tutti i coefficienti uguali, otteniamo

$$\begin{cases} 6a = 6 \\ 10a + 6b = 0 \\ 2a + 5b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\dfrac{5}{3} \\ c = \dfrac{19}{18}\,. \end{cases}$$

Allora la soluzione particolare trovata è $q(t) = t^2 - \frac{5}{3}t + \frac{19}{18}$.

c) L'integrale (o soluzione) generale dell'equazione di partenza è la somma dell'integrale generale trovato in 1) e di quello particolare trovato in 2), quindi

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t} + t^2 - \frac{5}{3}t + \frac{19}{18}\,, \quad \forall t \in I\!R\,.$$

Problema di Cauchy: se si vuole trovare la soluzione dell'equazione differenziale (3) che verifica le condizioni di Cauchy

$$y(0) = \frac{1}{18}\,, \quad y'(0) = -\frac{2}{3}\,,$$

si calcolano c_1 e c_2 imponendo le suddette condizioni, cioè, calcolata $y'(t)$ si pone

$$\begin{cases} y(0) = \dfrac{1}{18} \\ y'(0) = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + \dfrac{19}{18} = \dfrac{1}{18} \\ -3c_1 - 2c_2 - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 - 1 \\ -3(-c_2 - 1) - 2c_2 = 1\,. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 - 1 = 1 \\ c_2 = -2\,. \end{cases}$$

La soluzione che verifica le condizioni di Cauchy richieste è quindi

$$y(t) = e^{-3t} - 2e^{-2t} + t^2 - \frac{5}{3}t + \frac{19}{18}\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Esempio 10 Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 5y' + 6y = 6t^2 - e^{-2t}\,, \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Risoluzione: poichè tale equazione ha come omogenea associata la stessa dell'Esempio 1 e come termine noto la somma del termine noto dell'esempio precedente con la funzione $-e^{-2t}$, il suo integale generale è la somma dell'integrale generale trovato al punto 3) dell'esercizio precedente con un integrale particolare $h(t)$ dell'equazione

$$y'' + 5y' + 6y = -e^{-2t}\,,$$

quindi è

$$y(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-2t} + t^2 - \frac{5}{3}t + \frac{19}{18} + h(t)$$

L'integrale particolare dell'equazione ora scritta dovrebbe essere della forma $g(t) = \alpha e^{-2t}$ che pero' è soluzione dell'equazione omogenea associata. Allora (vedere * **Risonanza**) devo cercare una soluzione particolare della forma $h(t) = tg(t) = \alpha te^{-2t}$. Si ha quindi $h'(t) = e^{-2t}(\alpha - 2\alpha t)$ e $h''(t) = e^{-2t}(-2\alpha + 4\alpha t - 2\alpha) = e^{-2t}(-4\alpha + 4\alpha t)$, quindi $h(t)$ è una soluzione particolare se verifica

$$h'' + 5h' + 6h = -e^{-2t} \Leftrightarrow \text{(dividendo per } e^{-2t} \neq 0) \quad -4\alpha + 4\alpha t + 5\alpha - 10\alpha t + 6\alpha t = -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1.$$

Allora la soluzione particolare trovata è $h(t) = -te^{-2t}$.

L'integrale (o soluzione) generale dell'equazione di partenza è quindi

$$y(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-2t} + t^2 - \frac{5}{3}t + \frac{19}{18} - te^{-2t}\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$