Esercizi di riepilogo di Analisi

1) Siano

$$f(x) = \sqrt{|x-1|}\,e^{-2x} \quad g(x) = \exp\left(\frac{1}{|x-x^2-2|}\right) \quad h(x) = \ln\left(\left|\frac{2x^2-5x-3}{(x-1)(x-3)}\right|\right)$$

disegnarne il grafico dopo aver determinato il dominio, i limiti agli estremi, gli eventuali asintoti, l'insieme di derivabilità con eventuali massimi e minimi..

2)Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to\pi/2}(1-\cos^2 x)^{tg\,x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-sen3x}{1-\cos 2x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\ln(\cos x)}{\cosh^2 x-1-x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{tg2x}-1}{x}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^x-a^{-x}-2}{x^2}, \quad \lim_{x\to\pi/2}\frac{senx-1}{(x-\pi/2)^2}$$

3) Sia f(x) = arctg$\left(\frac{\cos x}{2+\cos x}\right)$, $x \in [0,\pi]$. Dimostrare che f è iniettiva, trovare il dominio della funzione inversa e scriverne esplicitamente l'espressione.

4) Maggiorare l'errore che si commette approssimando nell'intervallo [1,2] la funzione f(x) = $\frac{\ln x}{x}$ con il suo polinomio di Taylor del secondo ordine e di punto iniziale $x_0 = 1$.

5) Calcolare sen$^2(0,01)$ con un errore inferiore a 10^{-7}

6) Dimostrare che per ogni x reale non negativo vale la seguente disuguaglianza

$$\log(1+x) \le x$$

7) Calcolare i seguenti limiti , usando la formula di Taylor

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}-\frac{1}{\sin^4 x}, \qquad \lim_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+1/x)], \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)-e^{x^2}+1}{x-\sin x}$$

8) Calcolare i seguenrti integrali indefiniti

$$\int\left(1+\sqrt{\cot x}\right)(\sin x)^{-2}dx \qquad \int e^x\frac{2x+1}{\sqrt{x}}dx \qquad \int\frac{\cos x}{3-\cos^2 x}dx$$

9) Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_0^{\pi/3}\frac{\ln(1+\cos x)\sin x}{(1+\cos x)^{1/3}}dx \qquad \int_{-1/3}^{0}x\,arctg(3x+1)dx \qquad \int_1^e\cos(\ln x)dx$$

10) Sia f∈ $C^2([a,b])$. Sapendo che la tangente al grafico nel punto di ascissa x=a forma con l'asse delle x un'angolo di $\pi/3$ e nel punto b un angolo di $\pi/4$, calcolare

$$\int_a^b f''(x)dx \quad \text{e} \quad \int_a^b f'(x)f(x)dx$$

11) Utilizzando il teorema della media verificare le seguentl disuguaglianze

$$2\,e^2(e-1) \le \int_{e^2}^{e^3}\ln x\,dx \le 3\,e^2(e-1)$$

$$2/9 \le \int_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3} \le 2/7$$

e trovare una stima per eccesso e per difetto del seguente integrale

$$\int_{-3}^{3} e^{-x^2}dx$$

12) Sia

$$F(x) = \int_{\sin x}^{tg x} e^{-t^2}dt$$

scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa x=0.

13) Calcolare l'ordine di infinitesimo per x tendente a 0 della funzione

$$F(x) = \int_{0}^{x} e^{t^2}dt$$

e l'ordine di infinitesimo per x→ $\pi/2$ della funzione

$$F(x) = \int_{\pi/2}^{x} \ln(1+\cos t + t - \pi/2)dt$$

14) Calcolare l'area della parte di piano limitata dall'asse delle x, dalle rette x=-2, x=3 e dal grafico della funzione f(x)= x^2-4

15) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) = t \\ y(0) = 8/9 \end{cases} \qquad \begin{cases} (t^2+1)y'(t) + 4ty(t) = 12t \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) + ty(t) = 4t \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

16) Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

$y''(t) - 2y'(t) = 4$ $\qquad$ $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = 4e^{-2t}$

$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 5e^{-3t}$ $\qquad$ $y''(t) + y'(t) - 6t = te^{-t}\cos 2t$

$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 12e^{-t} - 6e^{t}$ $\qquad$ $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 100\cos 2t$