2. Regioni d'integrazione illimitate

Sia $f(x, y)$ continua in Ω illimitato.

DEFINIZIONE 2.1. *Una successione* M_n *tale che*

- $M_n \subseteq B_n$ *essendo* B_n *il cerchio di centro l'origine e raggio* n,
- $M_n \subseteq M_{n+1}$
- $\forall P \in \Omega \quad \exists n_P \Rightarrow P \in M_{n_P}$

si dice invadere Ω.

Si dice che esiste l'integrale improprio

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

se esiste finito e indipendente dalla successione $\{M_n\}$ il

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{\Omega \cap M_n} f(x, y) dx dy$$

Valgono due teoremi analoghi a quelli precedenti

TEOREMA 2.2. *Se esiste finito il*

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{\Omega \cap M_n} |f(x, y)| dx dy$$

allora esistono finiti e sono indipendenti dalla successione $\{M_n\}$ *tutti i limiti integrali*

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{\Omega \cap M_n} f(x, y) dx dy$$

TEOREMA 2.3. *Sia* $f(x, y)$ *continua e soddisfi la diseguaglianza*

$$|f(x, y)| \leq \frac{M}{r^{\alpha}}, \quad \alpha > 2 \tag{17}$$

allora esiste finito il

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{\Omega \cap M_n} |f(x, y)| dx dy$$

É evidente che la condizione (17) é una condizione sufficiente d'esistenza dell'integrale improprio.

3. Esempi di integrali doppi

ESEMPIO 3.1.
$$\iint_{R^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha} dxdy$$
Coordinate polari:
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{\rho}{(1+\rho^2)^\alpha} d\rho = 2\pi \int_0^\infty \frac{\rho}{(1+\rho^2)^\alpha} d\rho$$
L'ordine di smorzamento é
$$2\alpha - 1$$
L'integrale é finito se $2\alpha - 1 > 1 : \quad \alpha > 1$