MATEMATICA III Scheda 6

**1)** Sia $f(x,y) = \sin(xy) + e^{2x} - \cos y - 2x + y$.
Dimostrare che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno del punto (0,0).

Provare che $\varphi(x)$ ha in x=0 un punto critico e determinarne la natura.

**2)** Sia $f(x,y) = -x^2 + \log(1+xy) + ye^{2y}$. Provare che in un intorno del punto (0,0) l'insieme $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon f(x,y) = 0\}$ è esplicitabile rispetto ad una delle due variabili. Determinare il comportamento della funzione esplicitata nell'intorno del punto.

**3)** Sia $f(x,y) = e^{x-y} - x^2 - y^2 - e(x+1) + 1$.

Dimostrare che l'insieme degli zeri di $f$ è il grafico di una funzione $y = g(x)$ in un intorno del punto (0,-1). Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{1-g(x)+2x^2}{x^2}$

**4)**Sia $f(x,y,z) = e^{x+y} - z^2 + 2zy - \cos z + z$. Provare che in un intorno del punto (0,0,0) l'insieme degli zeri di f definisce una funzione $z = g(x,y)$ e trovare il piano tangente al grafico di $g$ nell'intorno del punto (0,0,0).

**5)** Trovare il massimo e il minimo della funzone $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ soggetta al vincolo $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2/9 + y^2 = 1\}$

**6)** Determinare massimi e della funzione $f(x,y) = x + y - 1$ soggetta al vincolo $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 - 2x = 0\}$. Stabilire quali tra i punti di massimo e minimo vincolato sono anche di massimo e minimo assoluto per $f$ nell'insieme T=$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$

**7)** Determinare il volume massimo di una scatola rettangolare con facce parallele ai piani coordinati con un vertice nell'origine ed il vertice opposto sul piano 4x+2y+z=2.

**8)** Si deve costruire una scatola rettangolare senza coperchio e avente un volume fissato V impiegando due materiali. Il materiale usato per

il fondo e la parte frontale della scatola è 5 volte più costoso del materiale usato per la parte posteriore e i fianchi. Quali devono essere le dimensioni della scatola per rendere minimo il costo dei materiali?