

## ANALISI a.a. 2015-2016

Esercizi di riepilogo sui limiti e le funzioni continue

1) Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{4\sqrt{x^3+x} - x}; & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \operatorname{sen} x} - \sqrt{\cos 2x}}{1 - \cos x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\ln(1+1/x)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} x \right) & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcsen} \{ \log(1+e^x) - x \} \end{aligned}$$

2) Determinare il dominio e calcolare i limiti agli estremi del dominio delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & g(x) &= (\sqrt{x^2+1} - x) & h(x) &= \log \left( \frac{2x+3}{2x+4} \right) \\ k(x) &= \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x} & j(x) &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3x}-1}{x+1} & l(x) &= \frac{e^{2x}-1}{\log(1-2 \sin x)} \end{aligned}$$

3) Determinare per quali valori di  $a \in \mathbf{R}$ , risulta continua la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} -(x-a)^2 & x \geq 0 \\ \frac{1-e^{x^3}}{\operatorname{sen}^3 x} & x < 0 \end{cases}$$

4) Sia

$$f(x) = \sqrt{\log(x-2) + 1}$$

Determinare l'insieme di definizione, dimostrare che la funzione  $f$  è invertibile e trovare l'immagine di  $f$

5) Siano

$$f(x) = \begin{cases} -x - k & -k \leq x \leq 0 \\ -k & 0 < x \leq \pi \\ \cos x - \frac{2}{3}k & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \log x & 0 < x < e \\ x^2 - 2ex + k & x > e \end{cases}$$

determinare  $k$  in modo che le funzioni  $f$  e  $g$  siano continue. Per tali valori di  $k$  disegnare il grafico di  $f$  e di  $g$ .

6) Dimostrare che esiste almeno uno zero della seguente funzione

$$f(x) = e^{2x} + 4 \sin(\pi x) - 3$$

trovare un intervallo della retta reale di ampiezza  $1/4$  contenete uno zero di  $f$ .

7) Provare che l'equazione

$$\operatorname{sen} x + 1 - x^2 = 0$$

ha almeno una radice positiva ed almeno una negativa.