Corso di laurea in Matematica a.a. 2012/2013
Calcolo 1
Scheda 2

1) Si determino estremo superiore ed inferiore, specificando se siano massimo o minimo, dei seguenti insiemi:

$$\bigcup_{n\geq 2}\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right], \qquad \bigcap_{n\geq 1}\left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$$

2) Si determino estremo superiore ed inferiore, eventuali minimi e massimi e proprietá di monotonia delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{3n^2}{4n+1} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Stabilire inoltre se ammettono limite ed in caso affermativo calcolarne il valore.

3) Si determino estremo superiore ed inferiore, specificando se siano massimo o minimo, del seguente insieme:

$$\left\{\sum_{k=0}^{n} 2^k \, , \, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

4) Stabilire se le seguenti successioni hanno limite o no, e quando possibile calcolarlo:

$$a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}, \quad a_n = \frac{2n-1}{3n+2}, \quad a_n = \frac{an+b}{cn+d}, \; a, b, c, d, \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad a_n = \cos n$$

5) Stabilire se le seguenti successioni hanno limite o no, e quando possibile calcolarlo:

$$a_n = \sqrt{\frac{n^2+2}{2n^2-1}}, \quad a_n = \frac{\sin(n)}{n}, \quad a_n = n - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

6) Stabilire se le seguenti successioni hanno limite o no, e quando possibile calcolarlo:

$$a_n = \log_2(n), \quad a_n = (-1)^n \log_2(n), \quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad a_n = \sqrt{n^2+n} - n.$$

7) Stabilire se le seguenti successioni hanno limite o no, e quando possibile calcolarlo:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se n é pari} \\ \frac{n-1}{n} & \text{se n é dispari} \end{cases} \qquad a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se n é pari} \\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \text{se n é dispari} \end{cases}$$

8) Verificare, usando la definizione, che le seguenti successioni tendono al limite indicato:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4}{2n^2+3} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-3n}{n+2} = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (3\sqrt{n} - 4n) = -\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{n^2-1} = 0$$

9) Fornire esempi di successioni che verificano le seguenti proprietá:

- $\{a_n\}$ é crescente;
- $\{a_n\}$ é decrescente;
- $\{a_n\}$ non é monotona;
- $\{a_n\}$ é monotona e convergente;
- $\{a_n\}$ é monotona e illimitata;
- $\{a_n\}$ é convergente e non monotona;
- $\{a_n\}$ non é limitata né superiormente né inferiormente;
- $\{a_n\}$ é limitata e non convergente;
- $\{a_n\}$ é limitata superiormente e non inferiormente;
- $\{a_n\}$ é limitata inferiormente e non superiormente.